UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL- PROFMAT.

NÉLIO SANTOS NAHUM

MÉTODOS DE CONTAGEM:
UMA PROPOSTA DE ENSINO COM A UTILIZAÇÃO DE PROBLEMAS PARA O ENSINO MÉDIO

ABAETETUBA – PARÁ
2021

NÉLIO SANTOS NAHUM

MÉTODOS DE CONTAGEM:
UMA PROPOSTA DE ENSINO COM A UTILIZAÇÃO DE PROBLEMAS PARA O ENSINO MÉDIO

.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT, da Universidade Federal do Pará – Campus Universitário do Baixo Tocantins, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa.

ABAETETUBA – PARÁ
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N153m Nahum, Nélio Santos.
Métodos de contagem : uma proposta de ensino com a utilização de problemas para o Ensino Médio / Nélio Santos Nahum. — 2021.
89 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Abaetetuba, 2021.

1. Métodos de Contagem. 2. Proposta de Ensino. 3. Resoluções de Problemas. I. Título.

CDD 510

NÉLIO SANTOS NAHUM

MÉTODOS DE CONTAGEM:
UMA PROPOSTA DE ENSINO COM A UTILIZAÇÃO DE PROBLEMAS PARA O ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT, da Universidade Federal do Pará – Campus Universitário do Baixo Tocantins, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Abaetetuba: 03 de Setembro de 2021.

Orientador: Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa.
PROFMAT/ UFPA

Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro.
PROFMAT/ UFPA

Prof. Dr. Antonio Maia de Jesus Chaves Neto.
ICEN/ UFPA

Dedico este trabalho à minha família, porto seguro em todos os momentos de minha vida. Em especial aos meus pais Antônio Maria Lobato Nahum e Benedita Santos Nahum, que conseguiram com muito esforço e dignidade, proporcionar aos seus oito filhos a oportunidade de estudo que não tiveram. A vocês minha eterna gratidão!

AGRADECIMENTOS

À Deus, por sua presença constante em todos os momentos de minha vida.

À minha esposa Patrícia Nahum, pelo amor, companheirismo e compreensão demonstrados durante o curso e em nossa vida.

Ao meu orientador, professor Dr. José Francisco da Silva Costa, por acreditar, aceitar e contribuir significativamente com este trabalho.

Ao amigo/irmão, professor Ataíde das Chagas Dias, sempre presente nos momentos difíceis com palavras de incentivo.

Aos professores, Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro e Dr. Aubebir Seixas Costa, pelos conhecimentos compartilhados, apoio e incentivo ao longo do curso.

Aos amigos do PROFMAT- Abaetetuba /2019. Em especial: Dilson Nascimento, Ivanilton Santos, Tonival Corrêa e Marcel Soares, pelos momentos de convívio e estudo.

À UFPA - Campus Universitário do Baixo Tocantins pela oportunidade.

À Direção da Escola Estadual Professora Benvinda de Araújo Pontes, por entender a importância e apoiar esta qualificação.

A todos os amigos que partilharam comigo as etapas para a concretização deste sonho.

Onde você vê a teimosia,
Alguém vê a ignorância,
Um outro compreende as limitações do companheiro,
percebendo que cada qual caminha em seu próprio passo.
E que é inútil querer apressar o passo do outro,
a não ser que ele deseje isso.
Cada qual vê o que quer, pode ou consegue enxergar.
“Porque eu sou do tamanho do que vejo.
E não do tamanho da minha altura. ”
(Fernando Pessoa)

RESUMO

Este trabalho de pesquisa aborda os métodos de contagem estudados no Ensino Médio. Com ênfase numa pesquisa bibliográfica em livros e artigos científicos, e pautada na utilização de uma sequência de atividades, foi possível construir uma proposta de ensino utilizando a resolução de problemas que busca valorizar o pensar, a montagem de estratégias, ao invés da utilização de exemplos e exercícios padronizados, resolvidos mecanicamente. A motivação para propor esta abordagem surgiu das inquietações advindas da experiência na docência na educação básica e dos conhecimentos adquiridos no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) que possibilitou uma visão de ensino significativa a partir do diálogo com obras diferentes dos livros didáticos que cotidianamente usam-se nas escolas. Nesse sentido, busca-se investigar e compreender os métodos de contagem, partindo de uma proposta que direciona à utilização de problemas, instigando a engenhosidade e compreensão da situação descrita. A proposta abordada privilegia o uso do princípio fundamental da contagem (PFC), com o qual pode-se resolver os problemas independente do tipo de agrupamento envolvido (arranjo, permutação e combinação). Assim sendo, apresentam-se quatro (4) sequências de atividades acompanhadas de propostas metodológicas para o ensino e aprendizagem dos métodos de contagem. A construção deu-se alinhada as orientações da BNCC e com as contribuições das análises das obras de Hazan, Dante e Morgado. Conclui-se a pesquisa considerando que a abordagem dos métodos de contagem a partir de resoluções de problemas possibilita uma aprendizagem significativa.

Palavras-chaves: Métodos de Contagem, Proposta de Ensino, Resoluções de Problemas.

ABSTRACT

This research work approaches the counting methods studied in high school. With an emphasis on bibliographical research in books and scientific articles, and based on the use of a activities sequence, it was possible to build a teaching proposal using problem solving that seeks to value logical thinking, the mounting of strategies, rather than by the use of standard examples solved mechanically. The motivation for proposing this approach arose from concerns derived from the teaching experience in basic education and from the knowledge acquired in the Professional Master's Degree in Mathematics in the National Network (PROFMAT), which has enabled a meaningful teaching vision from the dialogue with other works of textbooks that are used daily at schools. In this sense, we seek to investigate and understand the counting methods, starting from a proposal that directs the use of problems, stimulating the ingenuity and understanding of the situation described. The propose addressed favors the use of the Basic Principle of Counting (BPC), with which problems can be solved regardless of the type of grouping involved (arrangement, permutation and combination).Thus, four sequences of activities are presented, along with methodological proposals for teaching and learning of counting methods. The construction occurred in line with the guidelines of the BNCC and with the contributions of analyzes of the works of Hazan, Dante and Morgado. The research was concluded taking into account that the approach of counting methods based on problem solving enables significant learning.

Keywords: Counting Methods, Teaching Proposal and Problem Solving

LISTA DE FIGURAS

1. SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Na década de 70, em uma publicação intitulada Prelúdio à Análise Combinatória, Bachx et al (1975) menciona o estudo de análise combinatória como um sério obstáculo aos alunos do colegial (atualmente Ensino Médio) e aponta como possíveis causas o estudo restrito a definições e fórmulas, que segundo ele, conduzem o discente a um trabalho educacional mecânico que exclui a compreensão do que estão fazendo.

Em estudos recentes, Carvalho (2017), trata este tema como um paradoxo[1], pois são em muitos casos considerados difíceis por alunos e professores, apesar de fazerem uso de técnicas elementares e atribui como possível causa o fato de que, diferentemente do que ocorre com outros assuntos da matemática, em que o ensino baseia-se em aplicações diretas de fórmulas e repetição de exemplos-modelos, problemas de contagem exigem o pensar, o entendimento da situação representada, indo além de uma aplicação direta de fórmulas. Situações relacionadas à contagem são frequentes no cotidiano e podem ser verificadas, por exemplo, quando se pensa nas possibilidades de combinação de roupas, no planejamento de pratos em cardápios ou de possíveis escolhas de números em um jogo de loteria.

Sobre o aspecto histórico o processo de contar provavelmente tem seu início, através do método de correspondência biunívoca, o ponto de partida se deu quando o homem desenvolveu a capacidade de comparar e relacionar conjuntos de objetos, estabelecendo entre eles uma correspondência. Para isso, fazia-se uso de partes do corpo, como os dedos das mãos ou dos pés, estes eram os métodos mais naturais de contagem, além destes, pedregulhos, conchas ou grãos, além de marcas no chão, na areia, em ossos ou madeira, poderiam ser utilizados para quantificar e estabelecer as relações necessárias, tais procedimentos explicam muito métodos de contagem que ainda hoje se utilizam (EVES, 2011).

Os processos de contagem evoluem com o surgimento da análise combinatória, ou simplesmente combinatória em que Morgado et al (2016), a define, como a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas, tendo como objeto de estudo: demonstrar a existência, contar ou classificar os subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado, que satisfazem certas condições. A aplicação de seus métodos, permitem resolver problemas com ênfase na escolha, arrumação e contagem dos elementos de um conjunto.

[1] Paradoxo: o que é ou parece contrário ao senso comum.

Resolver problemas de contagem, segundo Dante (1991) vai além de simplesmente encontrar uma resposta certa, mas saber o que fez, como fez e por que a sua ação para resolver foi apropriada. Outro aspecto interessante consiste em considerar a diferença entre um exercício e um problema de matemática. Sobe esse aspecto, Souza (2015) define um exercício como sendo uma atividade de treinamento na qual se deve aplicar algum conceito ou fórmula conhecida. O problema, no entanto, coloca o aluno em uma situação de questionamento, levando-o a desenvolver estratégia matemáticas de resolução.

Tendo em vista o contexto anterior, vale considerar que os métodos de contagem aparecem nas habilidades EM13MAT310[2], contidas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Estas habilidades expressam as aprendizagens, tidas como essenciais, e que devem ser adquiridas pelos alunos nos diferentes contextos escolares: resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. BNCC (BRASIL, 2018)

A BNCC apresenta habilidades que orientam a construção de novos métodos e práticas, de contagem, possibilitando a utilização dos conhecimentos prévios dos alunos trazidos para a sala de aula, na condição de ferramentas pedagógicas. Tendo em vista estas orientações, e como complemento do desenvolvimento deste trabalho, utiliza-se uma análise, comparativa de três diferentes obras, de publicações e períodos distintos, buscando contribuições de cada uma para fundamentar a seleção e a construção das atividades envolvendo contagem através de problemas como proposta de ensino.

Assim sendo este trabalho direciona o estudo apontando condições de se compreender a temática com base no princípio fundamental da contagem (PFC) que se torna o caso mais geral para quaisquer situações que podem surgir, excluindo a necessidade de verificar se um problema dado é de arranjos ou combinações. Dessa maneira, tendo em vista que é possível um desenvolvimento centralizado no PFC, propõe-se como **objetivo geral**: Mostrar os métodos de contagem com ênfase numa proposta de ensino com a utilização de problemas voltados para o Ensino Médio. Para alcançar o objetivo, propõem-se como **objetivos específicos:** Verificar os aspectos históricos dos métodos de contagem; compreender o desenvolvimento dos métodos; utilizar a resolução de problemas com como estratégia de ensino.

[2] EM13MAT310: (EM) Ensino Médio, (13) indica o bloco de anos/séries, (MAT) indica a área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias, (3) indica a competência específica, (10) indica a posição da sequência de habilidades da competência específica proposta na área de conhecimento de Matemática e suas Tecnologias

A motivação e justificativa da pesquisa surgiram das inquietações advindas da experiência na docência e dos conhecimentos adquiridos no PROFMAT, de maneira mais específica ao cursar a disciplina matemática discreta. O estudo de combinatória, com a utilização de livros da SBM[3], possibilitou uma visão de ensino significativa a partir do diálogo com obras diferentes dos livros didáticos que cotidianamente usam-se nas escolas.

Para melhor abordagem, o trabalho encontra-se estruturado da seguinte maneira:

No **capítulo 1**, faz-se a um apanhado histórico do processo de contagem. Procura-se abordar com base em livros e artigos científicos, os primeiros indícios de contagem, dos métodos primitivos à sua evolução ao longo do tempo, até o surgimento da combinatória. Ao percorrer estes caminhos, busca-se entender as dificuldades apresentadas no processo de ensino e aprendizagem do tema.

O **capítulo 2**, destina-se a fundamentação teórica, abordam-se: Os princípios básicos da contagem (aditivo e multiplicativo), as permutações (simples, com elementos repetidos e circular) e combinações (simples e completas). Estes conceitos fazem parte da combinatória, e permitem resolver problemas envolvendo conjuntos finitos, sem a necessidade de se enumerar todos os elementos relacionados.

No capítulo 3, desenvolve-se a proposta para o ensino dos métodos de contagem, com a utilização de problemas que exigem o emprego de estratégias e instigam a curiosidade. Dessa maneira, apresenta-se uma sequência de atividades, acompanhadas de propostas metodológicas para o processo de ensino e aprendizagem. A seleção das atividades, alinham-se as competências a habilidades que estão previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Enfatizam-se ainda a análise de três diferentes obras (HAZAN, DANTE, MORGADO et al). As obras escolhidas e os motivos de suas escolhas estão justificados ao longo do capítulo 3, e os resultados obtidos das análises de suas contribuições, serão utilizados na identificação de dificuldades e no apontamento de caminhos para a construção das atividades apresentadas nos exemplos da pesquisa.

[3] SBM: Sociedade Brasileira de Matemática

1. CONTEXTO HISTÓRICO DOS MÉTODOS DE CONTAGEM

Este capítulo faz um resumo histórico dos métodos de contagem[4]. Ao contextualizar o modo de vida dos povos primitivos, aborda–se os primeiros indícios de contagem primitiva. Segue–se com a origem e evolução da combinatória, abordam-se os intrigantes problemas históricos, tais como: os quadrados mágicos, o Stomachion, as pontes de Königsberg (problema das sete pontes) e o Teorema das quatro cores, que contribuíram para a evolução dos métodos de contagem.

1.1 Origens dos Métodos de Contagem

Segundo Eves (2011), os métodos de contagem originaram-se muito antes da escrita ou mesmo da própria civilização, havendo pouco registro específico para análise. Sabe- se que esses processos são a base para o desenvolvimento de métodos matemáticos complexos, e sua compreensão é de fundamental importância para a história da matemática.

> O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos (há evidencias arqueológicas de que o homem, já há uns 50.000 anos, era capaz de contar) que a maneira como ocorreram e largamente conjectural. Não e difícil, porém, imaginar como isso provavelmente se deu. E razoável admitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer mais e menos quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos de uma coleção pequena, pois há estudos que mostram que alguns animais são dotados desse senso. (EVES, 2011, p.25)

Do citado, pode-se considerar as habilidades naturais dos seres humanos de pensar em noções quantitativas básicas: muito e pouco, grande e pequeno, rápido e lento. Desta forma faz sentido considerar que povos primitivos tivessem certo sentido de números, por exemplo, ao adicionar ou remover objetos de uma pequena coleção.

Segundo Eves (2011), o processo de contar provavelmente tem seu início, através do método de correspondência biunívoca, o ponto de partida se deu quando o homem desenvolveu a capacidade de comparar e relacionar conjuntos de objetos, estabelecendo entre eles uma correspondência. Para estabelecer tais correspondências ele fazia uso de partes do corpo, como os dedos das mãos ou dos pés, que eram os métodos mais naturais de contagem, além destes,

---

[4] Contagem: Ação de contar, de calcular, de avaliar algo. [Matemática] Indicação exata do número de elementos de um conjunto.(Aurélio, https://www.dicio.com.br/contagem/).

pedregulhos, conchas ou grãos, além de marcas no chão, na areia, em ossos ou madeira, poderiam ser utilizados para quantificar e estabelecer as relações necessárias.

Sobre o seu desenvolvimento Eves (2011), afirma que se deu de acordo com a evolução gradual da sociedade. Cita-se como exemplo: que as pessoas realizavam trocas e precisavam registrar a parcela de caça de cada família, ambas as atividades envolvem a ideia de contar, o que pode ser considerado o ponto de partida para o desenvolvimento de diversas ideias científicas. A evolução de formas mais primitivas para a vida em sociedade, criou a necessidade de um pensamento numérico aprimorado.

1.2 Surgimento e Evolução da Combinatória.

Ao abordar os aspectos históricos dos métodos de contagem, deve-se considerar o surgimento da combinatória, parte da matemática que estuda os problemas de contagem. Em relação a sua origem, cada autor discutido nesse trabalho apresenta o seu ponto de vista. Morgado *et al* (2016), considera o binômio $(1 + x)^n$ como um dos primeiros problemas relacionados à combinatória. EVES (2011), credita tal feito a um diagrama numérico conhecido como lo-shu, o mais antigo exemplo de quadrado mágico. Tavares (2005) atribui o início do estudo de combinatória, a Arquimedes (287 a.C – 212 a.C), por meio do Stomachion.

A seguir abordam-se esses três pontos de vista, além das contribuições à combinatória, advindas dos jogos de azar e dos problemas históricos intitulados: as pontes de Königsberg (problema das sete pontes) e o Teorema das quatro cores.

1.2.1 O Binômio $(1 + x)^n$.

Morgado *et al* (2016), aponta o desenvolvimento do binômio $(1 + x)^n$ como um dos primeiros problemas estudados ligados ao estudo de combinatória. Citando haver registro nos Elementos de Euclides[5], em torno de 300 a.C. O binômio possui relação direta como o Triângulo de Pascal[6] e era conhecido por Shih-Chieh, na China, (em torno de 1300) e antes disso pelos hindus e árabes. Afirma também que o matemático hindu Báskhara (1114 - 1185), sabia calcular o número de permutações, combinações e de arranjos de *n* objetos.

1.2.2 Quadrados Mágicos (Lo-Shu).

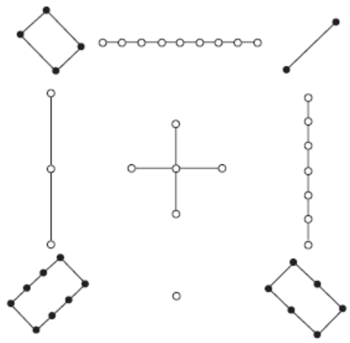
---

[5] Elementos de Euclides: A obra de Euclides, escrita em torno de 300 a. C é composta de 13 livros ou capítulos e reúne os conhecimentos de geometria, álgebra e aritmética.

[6] Triângulo de Pascal: Triângulo Aritmético de Tartaglia-Pascal (ou simplesmente Triângulo de Pascal), utilizado para calcular os coeficientes do desenvolvimento de potências do tipo $(x + y)^n$, com *x* e *y* reais e *n* inteiro positivo.

Segundo EVES (2011), um dos clássicos matemáticos chineses mais antigos é o I - King ou Livro das Permutações. Nele aparece um diagrama numérico conhecido como Lo-Shu. Trata-se do exemplo conhecido mais antigo de quadrado mágico que segundo a lenda o primeiro a vê-lo foi o imperador Yu, por volta de 2200 a.C., decorando a carapaça de uma tartaruga divina que lhe apareceu as margens do rio Amarelo. Conforme representado na Figura (**Figura 1**). É um arranjo quadrado de numerais expressos por nós em cordas; nós pretos para números pares e brancos para números impares.

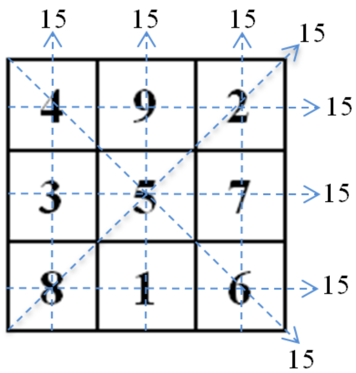
Figura 1- Representação do lo-shu



Fonte: Eves (2011, p.269).

Um quadrado mágico é um grupo ordenado de números 1, 2, 3, .:.:., n², distintos, dispostos de forma que cada linha, coluna ou diagonal deste quadrado possua a mesma soma, chamada constante mágica do quadrado, conforme mostra a figura (**Figura 2**). O quadrado mágico se diz normal se os n² números que o formam são os n² primeiros números inteiros positivos.

Figura 2 - Representação do quadrado mágico.



Fonte: acervo do autor

Santinho (2006) cita que os chineses acreditavam que os quadrados mágicos possuíssem atributos místicos, e que simbolizavam os princípios básicos que formavam o universo, o número 5 representava a Terra e ao seu redor estão distribuídos os quatro elementos principais, a água 1 e 6, o fogo 2 e 7, a madeira 3 e 8 e os metais 4 e 9. Acredita-se que além do lado místico, despertaram também interesse em alguns matemáticos, como: Bernard Frénicle de Bessy (1602-1675), Claude- Gaspar Bachet (1581-1638), Pierre Fermat (1601-1665) e Leonhard Euler(1707-1783).

Do aspecto de construção dos quadrados mágicos. Andrade (1999), demonstra uma expressão para o cálculo de M, que representa a soma dos números de qualquer linha, coluna ou qualquer diagonal do quadrado), a qual denominou de constante mágica. Para isso, basta observar que a soma das n linhas da matriz é igual a:

$$M + M + \cdots + M = nM \tag{1}$$

Pode-se reescrever (1) da seguinte maneira:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2} \tag{2}$$

Para a soma de todas as *n* linhas, tem-se:

$$\mathrm{nM} = \frac{\mathrm{n}^2(\mathrm{n}^2+1)}{2} \tag{3}$$

Chega-se a expressão:

$$\mathrm{M} = \frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}^2+1)}{2} \tag{4}$$

Para descobrir a forma geral de um quadrado mágico de ordem 3. Andrade (1999) constrói o quadrado, conforme figura (**Figura 3**):

Figura 3 - Representação genérica do quadrado mágico.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Fonte: acervo do autor.

Resolvendo o sistema linear formado pelas igualdades das somas de linhas, colunas e diagonais, e escolhendo *a* e *b* como variáveis livres, obtém-se um quadrado mágico de terceira ordem como mostra a figura (**Figura 4**):

Figura 4 - Representação do quadrado mágico em função das variáveis *a* e *b*.

a	b	$15-a-b$
$20-b-2a$	5	$b-10+2a$
$-5+a+b$	$10-b$	$10-a$

Fonte: Acervo do autor.

Pode parecer que existem inúmeros quadrados mágicos de terceira ordem, bastando atribuir valores inteiros às variáveis *a* e *b*, mas isso deve levar em consideração que o valor obtido deve ser um número inteiro que não se repita no intervalo $[1,n^2]$. Logo (a, b), só podem assumir os valores: (2,7), (2,9), (4,3), (4,9), (6,1), (6,7), (8,1) e (8,3), gerando os quadrados mostrados na figura (**Figura 5**):

Figura 5 - Representação dos quadrados mágicos de terceira ordem.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	3	8
9	5	1
2	7	6

4	9	2
3	5	7
8	1	6

6	1	8
7	5	3
2	9	4

6	7	2
1	5	9
8	3	4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Fonte: acervo do autor.

Observa-se que cada um dos oito quadrados, pode ser obtido de qualquer outro por troca de linha, troca de coluna ou transposição de matriz. Nesse caso, diz-se que esses quadrados são iguais e que existe apenas um quadrado mágico de ordem 3. De modo geral, o cálculo do número de quadrado mágico de uma determinada ordem é um problema não resolvido. Sabe-se apenas que as quantidades de quadrados mágicos de ordens menores do que 6 conforme tabela (**Tabela 1**) a seguir:

Tabela 1 - Quantidades de quadrados mágicos.

Ordem	Quantidades
3	1
4	880
5	275.305.224
6	desconhecido.

Fonte: acervo do autor.

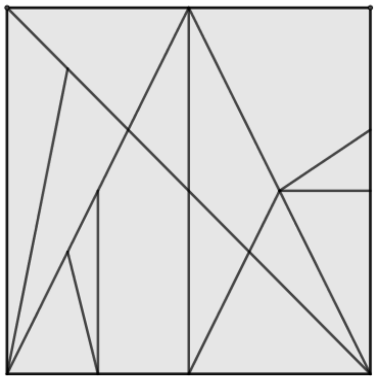
Segundo Vazques (2004), o matemático francês Frénicle (1693) apresentou todos os 880 quadrados de ordem 4, e nesta mesma época seu compatriota, De La Loubère (1691) descreveu um método de construção de quadrados de ordem ímpar conhecido como método de fronteira.

1.2.3 O Stomachion

Tavares (2005) atribui-se o início do estudo de combinatória, a Arquimedes (287 a.C – 212 a.C), e isso deve-se a uma publicação que despertou grande interesse e curiosidade de grandes matemáticos da época e que ainda hoje é objeto de estudo. Trata-se do ***Stomachion***, que acreditava-se ser um jogo, semelhante ao Tangram[7], que consiste em determinar de quantos modos poderiam ser reunidas 14 peças planas, de diferentes formatos e tamanhos, que quando encaixadas devem formar um quadrado, conforme mostra a figura (**Figura 6**).

[7] Tangram: Quebra cabeça geométrico, de origem chinesa.

Figura 6 - Representação do Stomachion



Fonte: acervo do autor.

O Stomachion, foi motivo de muita curiosidade e o questionamento era: como um aparente simples jogo, foi capaz de despertar a atenção de uma das mais brilhantes mentes da história? Em dezembro de 2003, o jornal americano The New York Times publicou um artigo intitulado In Archimedes Puzzle, a New Eureka Moment, sobre os resultados da pesquisa do historiador de Matemática Reviel Netz, da Universidade de Stanford, Califórnia, em que ele afirma que o Stomachion não era um mero passatempo, mas um objeto executado por Arquimedes para fins de Análise Combinatória.

De maneira mais especificamente, a conclusão de Netz é que Arquimedes desejava determinar de quantas formas distintas poderiam ser encaixadas as 14 peças para formar o quadrado. Desconsiderando as posições simétricas, chegou-se a 268 possibilidades, valor que não é possível verificar se Arquimedes encontrou.

Segundo Tavares (2005), a resposta confirmada para essa questão pode ser 17.152 ou, desconsiderando as soluções simétricas, 268, o que nos parece mais razoável. Cita também que não está claro se Arquimedes obteve essa resposta, no entanto, como dito, há divergências sobre a origem da análise combinatória e neste caso atribui-se a Arquimedes, por meio do Stomachion.

1.2.4 Jogos de Azar

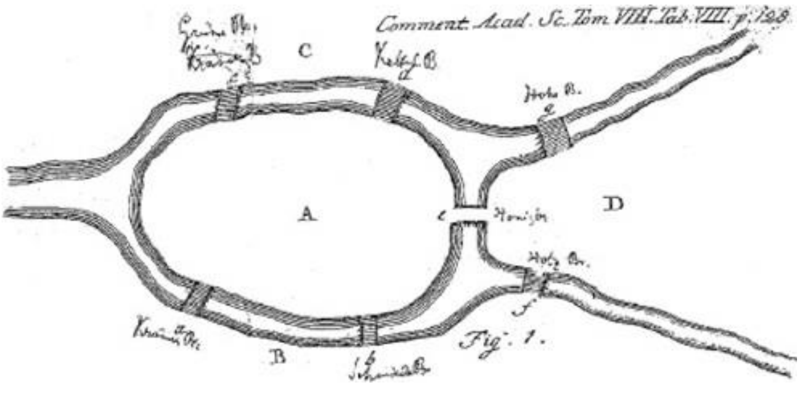
No processo de desenvolvimento da combinatória Morgado *et al* (2016) atribui aos jogos de azar, importante contribuição. Jogadores buscavam maneiras seguras de ganhar em jogos de cartas, dados ou moedas. Entre eles, cita-se o cavalheiro De Meré, um homem que ficou na história como escritor. De Meré discutia com Pascal problemas relativos à probabilidade de ganhar em certos jogos de cartas e dados. Tavares (2005) menciona que um dos problemas era saber qual o número mínimo de vezes necessário para que se obtenha um "doble seis" (6 e 6) no lançamento de dois dados, um certo número de vezes.

Estava nascendo então a teoria das probabilidades[8], campo fértil para o desenvolvimento da combinatória e objeto de estudo de matemáticos como: Blaise Pascal (1623-1662), Pierre de Fermat (1623-1662), Galileu Galileu (1564-1642), Jaime Bernoulli (1654-1705), Leonhard Euler (1710 -1761) e Laplace (1749-1827), se interessaram pelo assunto e contribuíram grandemente para seu desenvolvimento.

1.2.5 As Pontes de Königsberg

Leonhard Euler, também enunciou e resolveu um problema que intrigava os matemáticos de sua época, conhecido como as pontes de Königsberg. Segundo Stewart (2009), este problema levou Euler a criar em 1735, um novo campo na matemática, denominado de teoria dos grafos[9]. Königsberg, que naquele tempo ficava na Prússia, é cortada pelo rio Pregelarme. Havia duas ilhas, ligadas às margens e entre elas próprias por sete pontes. O problema consistia em saber se era possível dar uma volta pela cidade passando uma, e somente uma vez por cada ponte, conforme mostra a figura (**Figura** 7), que mostra a representação feita por Euler..

Figura 7 - Desenho das Pontes de Königsberg feito por Euler.



Fonte: Stewart (2009, p.60).

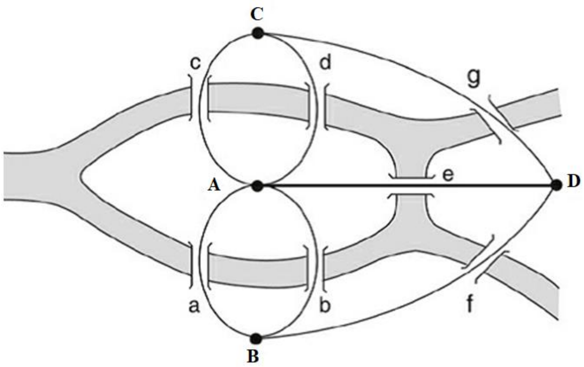
Euler provou não haver solução para o problema e apresentou de forma mais geral, critérios para que qualquer problema semelhante tenha solução, o que não se aplicava a este

[8]Teoria das Probabilidades: É o ramo da matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios(MORGADO et al, 2016).

[9] Teoria do Grafos: Como disciplina, surgiu no século XVIII, quando começou a ser estudada sistematicamente pelo influente e prolífico matemático suíço Leonhard Euler. Mas apenas no século XX ela chega à maturidade, passando de uma mera coleção de resultados desconexos a uma subárea estruturada da chamada Matemática Discreta (BENEVIDES, 2019).

caso. Euler percebeu que a geometria precisa é irrelevante e o que importa é a forma como as coisas estão interligadas e dessa forma foi capaz de reduzir o problema a uma rede de pontos unidos por linhas, conforme figura (**Figura** 8). Cada ponto correspondendo a uma porção de terra, e dois pontos estão unidos por linhas se houver uma ponte ligando as porções de terra correspondentes.

Figura 8 - Transformando as pontes de Königsberg numa rede.



Fonte: Stewart (2009, p.61).

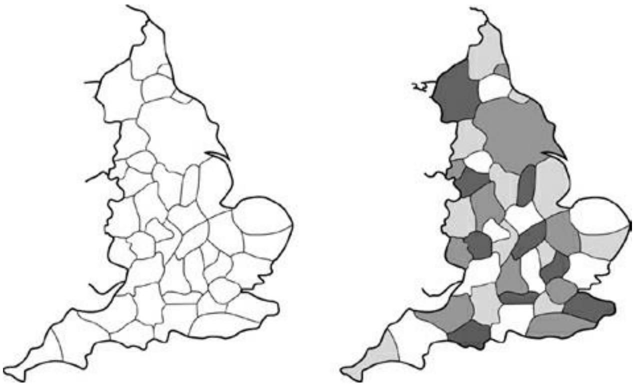
Portanto, tem-se os pontos A, B, C e D e as sete arestas a, b, c, d, e, f, g, uma para cada ponte. Isso permitiu reescrever a pergunta da seguinte maneira: É possível encontrar um caminho através da rede que passa por cada aresta exatamente uma vez?. Segundo Stewart (2009), para provar se tais problemas têm solução ou não, Euler distinguiu dois tipos de trajeto. Um aberto que começa e termina em pontos diferentes e o fechado que começa e termina no mesmo ponto. Concluiu que, nesta rede, nenhum dos dois tipos é possível.

1.2.6 O Teorema das Quatro Cores

Outra importante contribuição à evolução da combinatória deve-se a um problema de enunciado simples, porém sua solução mostrou-se bastante complexa, trata-se do Teorema das Quatro Cores.

Stewart (2009) indica que o problema teve origem em 1852 com Francis Guthrie, estudante da University College, em Londres. Ao colorir o mapa dos condados ingleses, conforme figura (**Figura 9**), descobriu que conseguia fazer usando 4 cores, de modo que que os condados adjacentes nunca tivessem a mesma cor. Ele escreveu uma carta para seu irmão Frederick, descrevendo o que ele pensava ser um simples enigma. Escreveu “Será que é possível colorir qualquer mapa no plano com 4 cores (ou menos) de modo que as regiões que possuem fronteiras comuns jamais tenham a mesma cor? ”.

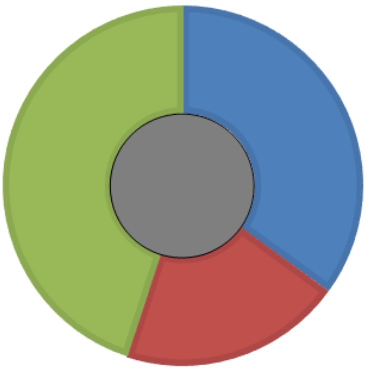
Figura 9 - Colorindo os Condados da Inglaterra com quatro cores.



Fonte: Stewart (2009, p.20).

Frederick apresentou a conjectura de seu irmão a Augustus De Morgan[10], no entanto, soube-se que De Morgan não conseguiu, como confessou em outubro do mesmo ano em uma carta ao seu colega irlandês ainda mais famoso, Sir William Rowan Hamilton. De acordo com Santos (2008), De Morgan, obteve algum progresso. Inicialmente apontou que, se um mapa tem quatro áreas adjacentes duas a duas, ele precisa de quatro cores para ser colorido como mostra a figura (**Figura 10**).

Figura 10 – Mapa com quatro regiões adjacentes duas a duas



Fonte: acervo do autor

[10] Augustus De Morgan (1806 - 1871): Matemático e lógico britânico.

Em seguida, ele tentou determinar um mapa no qual cinco regiões fossem adjacentes, e provou que tal mapa não existe. Este fato não impede que existam mapas que necessitem de cinco cores. Um mapa que não possui quatro regiões adjacentes duas a duas pode exigir quatro cores para ser colorido, conforme figura (**Figura 11**). Este fato levou a conclusão que, mesmo o mapa que não possui cinco áreas adjacentes dois pode exigir cinco cores para ser colorido.

Figura 11 – Mapa que não possui quatro regiões adjacentes duas a duas.

Fonte: acervo do autor

Depois de 1860, por mais ou menos 20 anos, o interesse dos matemáticos pelo problema diminuiu, não sendo discutido entre os matemáticos da época, no entanto não foi esquecido (PIMENTA, 2014). Em 1878, Arthur Cayley indagava na seção de Matemática da Royal Society se alguém já havia apresentado solução da Conjectura das Quatro Cores. Ninguém o resolvera, mas no ano seguinte Alfred Bray Kempe, um advogado e que tinha estudado no Trinity College de Cambridge, onde fora aluno de Cayley, publicou uma demonstração completa do Teorema das Quatro Cores no American Journal of Mathematics. A demonstração de Kempe foi estudada por vários matemáticos de renome e alguns deles fizeram sugestões para melhorar a demonstração. Portanto, em 1879, considerava-se definitivamente estabelecido o Teorema das Quatro Cores.

Segundo Sampaio (2004), em 1890, onze anos após a publicação de Kempe, Percy John Heawood, provou por meio de um contra-exemplo, que a demonstração de Kempe tinha um erro. Heawood foi além, demonstrou que cinco cores são suficientes para colorir qualquer mapa plano onde países de fronteiras comuns possuem cores diferentes.

Segundo Pimenta (2014). Durante 124 anos, muitas foram as tentativas de desenvolver métodos capazes de resolver o problema, mas somente, em 1976, com a ajuda de um IBM[11] 360, em Urbana (Illinois), Kenneth Appel e Wolfgang Haken apresentaram uma demonstração do Teorema das Quatro Cores. Quando a notícia desta façanha se espalhou, houve um enorme entusiasmo. Mas a euforia esfriou quando souberam que essa demonstração incluía mais de mil horas do uso de computadores de alta velocidade. A demonstração era demasiadamente longa para ser verificada sem o uso dos computadores e ainda havia a possibilidade dos computadores terem cometido alguma falha.

Stewart (2009), afirma que nos dias atuais, com computadores mais rápidos, pode-se repetir o processo em cerca de uma hora. Sabe-se que o Teorema das quatro cores é verdadeiro, o que responde à pergunta aparentemente inocente de Guthrie. E isso é uma conquista maravilhosa, mesmo que dependa de alguma ajuda de um computador, a construção de uma demonstração que não necessite do uso de computadores continua em aberto.

Estava dado um dos pontapés iniciais para a Teoria dos Grafos, fundada por Euler, Gustav Robert. Kirchhoff (1824-1887) e Arthur Cayley(1821-1895). Em 1834, Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) formulou o princípio das gavetas. Esse princípio aparentemente simples é um dos recursos mais utilizados para resolver problemas de combinatória.

É provável que nesse resumo histórico, outros matemáticos e suas contribuições não tenham sido mencionados, pois ao longo da história, muitos foram os que se dedicaram ao estudo da combinatória. Tavares (2005), refere-se aos avanços da combinatória na área computacional. Através de simulações em computadores, os pesquisadores dessa área podem fazer obter resultados que os permitem compreender e conjecturar problemas que são difíceis de resolver por métodos analíticos, levando à sua solução.

[11] IBM 360: IBM (International Business Machines Corporation) é uma empresa dos Estados Unidos voltada pra a área de informática. O IBM 360 constitui-se numa família de computadores de grande porte dedicado ao processamento de um volume enorme de informações, lançado Abril de 1964.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.

2.1 Contagem no Cotidiano.

São frequentes no cotidiano, situações relacionadas a tomada de decisões envolvendo contagem, como exemplo: o número de maneiras de uma pessoa vestir-se, os caminhos que um estudante pode fazer de sua casa até a escola, as possibilidades de se organizar uma coleção de livros na estante e as formas de se combinar as opções de comida para montar um cardápio. Nestes casos, com quantidades de elementos, consideradas pequenas, pode-se realizar a contagem de forma direta, bastando-se descrever todos os casos possíveis.

Diferente das primeiras situações, há casos em que o número muito grande de elementos torna a contagem um a um muito trabalhosa e quase impossível, imagine, por exemplo a situação na qual deseja-se saber o número total de placas de veículos (Placas Mercosul), que é formada por quatro letras de um alfabeto de 26, três números (dentre 10 possíveis), nessa ordem (LLL-NLNN). Neste caso, descrever as possibilidades e conta-las é extremamente trabalhoso são 456.976.000 combinações, segundo o Departamento Nacional de Trânsito (DENATRAN). Os métodos de contagem que se seguem, permitem resolver este e outros problemas, como se verá neste texto.

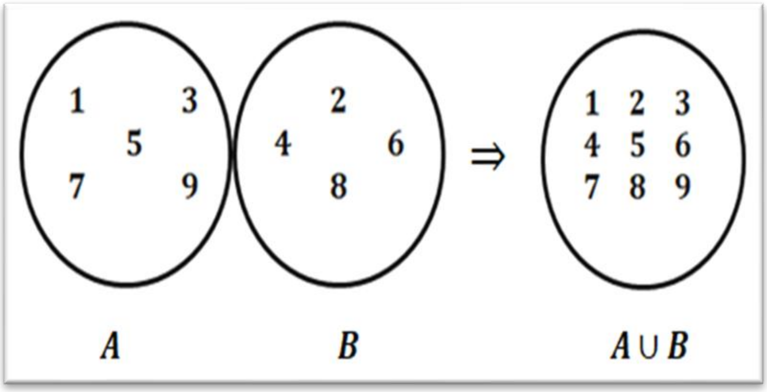
2.2 Princípios Básicos de Contagem: aditivo e multiplicativo.

Os princípios básicos de contagem (aditivo e multiplicativo), fundamentam-se nas operações aritméticas de adição e multiplicação e permitem, como se verá ao longo deste capitulo, a solução de muitos problemas. Como condução ao entendimento do processo aditivo, Morgado (2016), diz que, dados os conjuntos disjuntos[12] , A e B, contendo p e q elementos, respectivamente, então, o conjunto formado pela união de A e B, possui $(p + q)$ elementos.

[12] Conjuntos disjuntos:Não possuem elementos comuns.

Exemplo 1: Sejam os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$, a união de A e B, possui nove elementos (**Figura 12**).

Figura 12 - A união de dois conjuntos A e B.



Fonte**:** Acervo do autor

O princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem (PFC), constitui junto com o aditivo, duas importantes ferramentas da combinatória. Consideremos como motivação inicial para introdução dessa ideia, o problema apresentado por Holanda (2020), o qual se segue enunciado e resolvido.

Problema 1.

Uma porta só é aberta quando se utiliza, simultaneamente a chave e o cartão corretos. Se uma pessoa dispõe de duas chaves e três cartões, quantos testes se deve fazer para garantir que a porta irá abrir?

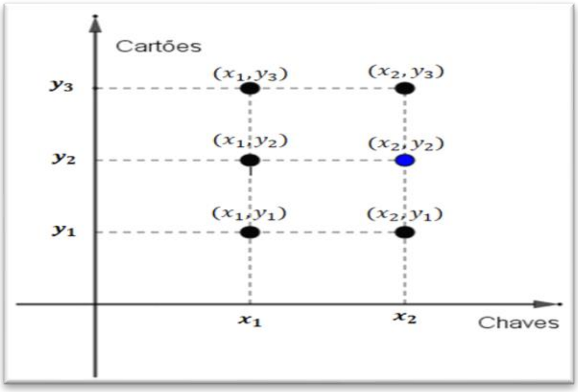
Solução:

Considere os conjuntos: Chaves**:** $X = \{x_1, x_2\}$ e Cartões: $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Utilizando-se o sistema cartesiano ortogonal[13], pode-se representar a situação conforme figura (**Figura 13**).

---

[13] Sistema cartesiano ortogonal: É constituído por dois eixos orientados, perpendiculares entre si, com a mesma origem O, e que dividem o plano em quatro regiões, denominadas de quadrantes.

Figura 13 - Representação no plano cartesiano do pares (chaves, cartões).



Fonte**:** Acervo do Autor.

Para abrir a porta, deve-se escolher um elemento em X e posteriormente, um elemento em Y, ou seja, um elemento do produto cartesiano:

$$\text{X x Y} = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3)\}.$$

O número de testes distintos que se deve fazer para ter certeza de abrir a porta é dado pela cardinalidade do produto cartesiano:

$$X \text{ x } Y = 2\,.\,3 = \ 6\,.$$

Existem 6 combinações possíveis, e admitindo-se como corretos, a chave x_2 e o cartão y_2, o par (x_2, y_2) é o único que satisfaz o problema como se verificou na figura (Figura 13). Por se tratar de um problema com poucos elementos, pode parecer desnecessário o uso de técnicas mais especificas de contagem sendo possível, neste caso, descrever os seis pares chaves/cartões sem grandes dificuldades.

No entanto à medida que o número de elementos se torna maior, o trabalho para conta-los um a um, torna-se impraticável e em alguns casos, praticamente, impossível, como descrito na introdução deste capitulo. O princípio fundamental da contagem que será enunciado e demonstrado a seguir, possibilita a solução de muitos problemas de contagem, sem, no entanto, a necessidade de descrever todos os casos possíveis. Assim sendo, entende-se o PFC utilizando a definição:

Se uma decisão d_1 pode ser tomada de *m* maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2, puder ser tomada de *n* maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é *m.n* (MORGADO *et al*, 2016). A definição enunciada, pode ser demonstrada, analiticamente.

Demonstração:

Se d_1 e d_2 podem ser tomadas respectivamente de $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$ e $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ maneiras. Cada par ordenado (x_i, y_j) com $i = 1, 2, 3, \ldots, m\ \ e\ j = 1,2, 3, \ldots, n$, representa um modo de se tomar sucessivamente as duas decisões. Para contar todos os pares (x_i, y_j), fixemos o primeiro termo x_1 e varia-se o segundo $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$. Repete-se este mesmo procedimento para cada x_i, obtêm-se os resultados possíveis de *n* linhas e *m* colunas:

$$\begin{array}{c}
(x_1, y_1), (x_1, y_2), \ldots, (x_1, y_m) \\
(x_2, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_2, y_m) \\
\vdots \qquad\quad \vdots \quad\ \ldots \qquad \vdots \\
(x_n, y_1), (x_n, y_2), \ldots, (x_n, y_m)
\end{array}$$

O total de pares (decisões sucessivas D_1 e D_2) é $m.n$.

Voltando ao **Problema 1**, e aplicando o PFC, é possível resolvê-lo sem a necessidade de enumerar todas as combinações chaves/cartões. Considere d_1 como a escolha da chave e d_2 a do cartão. O número de maneiras de tomar as decisões d_1 e d_2 é:

$$2.3 = 6$$

Tem-se como resposta, seis possíveis combinações.

Problemas de contagem envolvem estratégias e sua solução exige engenhosidade e compreensão da situação descrita. Morgado et al (2016) indica que estratégias corretas envolvem, colocar-se no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada e verificar que decisões tomar. Quando necessário, dividi-las em etapas e não adiar as eventuais dificuldades, pois quando adiadas podem dificultar a solução.

Em relação as estratégias, e como aplica-las, tem-se como exemplo o problema proposto na avaliação do ENQ 2020.1 (Exame Nacional de Qualificação do Profmat, 2020.1), que será enunciado e resolvido a seguir.

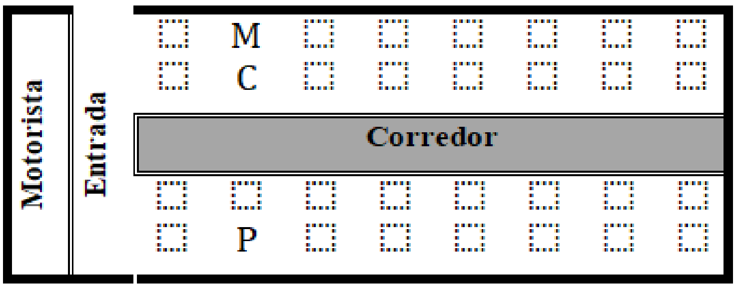
Problema 2.

Um ônibus possui 32 poltronas distribuídas em 8 fileiras, ou seja, quatro em cada fileira, duas em cada lado do corredor. Pergunta-se: Se forem os primeiros a entrar no ônibus, de quantas formas uma criança e seus dois responsáveis podem ocupar três poltronas do ônibus de modo que todos fiquem na mesma fileira e um dos adultos fique ao lado da criança, sem que esteja separado pelo corredor?

Solução:

Como estratégia de solução considere que as três pessoas envolvidas são: Pai (P), Mãe (M) e a Criança (C).

Figura 14 - Representação de uma configuração válida.



Fonte: Acervo do Autor.

Colocando-se no papel de quem tem que executar a tarefa proposta, uma das possíveis maneiras de resolver o problema é tomando-se as decisões:

D_1 : Ao entrar no ônibus vazio, escolhe –se a fileira onde sentar (8 escolhas).

D_2 : Qual responsável sentará ao lado da criança (2 escolhas).

D_3: O lado do corredor, onde sentarão o responsável e a criança (2 escolhas).

D_4: Decidir entre a criança e o responsável ao seu lado, quem sentará na poltrona da janela e quem ficará na do corredor (2 escolhas).

D_5: Estando um dos responsáveis sentado ao lado da criança, o outro deve escolher uma dentre as 2 poltronas restantes na mesma fileira (2 escolhas).

Portanto, para as cinco etapas, há: 8 . 2 . 2 . 2 . 2 = 128.

O resultado 128 representa todos os modos de ocupação das três poltronas pela criança e seus responsáveis, que atendem as condições do enunciado.

2.3 Permutação Simples e Fatorial.

Permutação está ligada ao ato de permutar, ou seja, reordenar um grupo de objetos. Este conceito está presente em muitas situações de contagem, para melhor entende-lo, apresentam-se as situações três e quatro seguintes.

Problema 3.

Ana (A), Benedita (B), Cláudia (C) e Davi (D), chegaram juntos a escola e cada um deseja falar reservadamente com o diretor. De quantas maneiras é possível formar uma fila entre eles, determinando a ordem em que serão atendidos?

Solução:

Para organizar a fila, deve-se decidir quem será a primeira, a segunda, a terceira e a quarta pessoa. A primeira deve ser qualquer uma das quatro, a segunda deve ser diferente da primeira, a terceira diferente das duas primeiras e a quarta estará determinada pelas escolhas anteriores.

Ordem das Pessoas:	1ª	2ª	3ª	4ª
Possibilidades de escolhas:	4	3	2	1

Aplicando o PFC, calcula-se:

$$4.3.2.1 = 24.$$

O valor, 24, representa o número de maneiras distintas das quatro pessoas ficarem em filas.

Problema 4.

De quantos modos é possível organizar *n* pessoas em fila?

Solução:

Estendendo-se a ideia do problema anterior, forma -se a fila de modo semelhante. A primeira deve ser qualquer uma das n pessoas, a segunda diferente da primeira, a terceira diferente das duas primeiras e assim até a última que estará determinada pelas escolhas anteriores. Conforme representação:

Ordem das Pessoas:	1ª	2ª	3ª	. . .	penúltima	última.
Possibilidades de escolhas:	n	$(n-1)$	$(n-2)$	. . .	2	1

Cada arrumação das *n* pessoas é uma permutação simples. Aplicando o PFC, obtêm-se, as diferentes ordenações, as quais pode ser calculadas pela expressão abaixo.

$$n.(n-1).(n-2)\ldots 3.2.1$$

Este produto números naturais de 1 até *n*, é frequente em combinatória e consiste na notação matemática usada para simplificar os cálculos. Na verdade, a expressão:

$$n.(n-1).(n-2)\ldots 3.2.1$$

Pode ser simplificada utilizando uma notação, usada pela primeira vez pelo matemático francês Christian Kramp[14] (1760 - 1823) que torna a expressão acima muito mais compacta.

> "Eu dei-lhe o nome 'faculdade'. Arbogast substituiu o nome por 'fatorial', que é mais claro e francês. Ao adotar a sua ideia, fico feliz em homenagear a memória de um amigo.
> (...)
> Eu uso a notação bastante simples n! para designar o produto de números decrescentes desde n à unidade, ou seja, n.(n-1).(n-2)...3.2.1. O uso constante em análise combinatória, na maioria das minhas demonstrações, nas quais eu utilizo essa ideia, fez esta notação necessária". (VIEIRA, 2021).

[14]**Christian Kramp** (1760 – 1823) foi um matemático francês. Seus interesses eram abrangentes, publicou um trabalho que tratava da primeira ascensão do balão em seus aspectos históricos, físicos e matemáticos. Seus trabalhos mais conhecidos foram os referentes ao estudo do fatorial (VIEIRA, 2021).

Entende-se como Fatorial o produto de todos os números naturais de 1 até n, e é representado, em símbolos da seguinte maneira.

$$n! \qquad (1)$$

A expressão (1) é lida como *n-fatorial* e pode ser entendida ainda como se verifica:

$$n! = n.(n-1).(n-2)\ldots.3.2.1. \qquad (2)$$

Definido fatorial é possível então, introduzir o conceito de permutação simples. Em combinatória, indica-se por permutações simples as maneiras de se organizar *n* elementos distintos (pessoas, malas, livros, etc.) em uma fila. Santos et al (2007), define permutação simples de *n* objetos distintos qualquer agrupamento ordenado de objetos e se denota por P_n . Portanto, o número de permutações simples de ***n*** objetos distintos é:

$$P_n = n! \qquad (3)$$

$$P_n = n.(n-1).(n-2)\ldots.3.2.1. \qquad (4)$$

2.4 Permutação Circular.

No estudo das permutações é interessante considerar problemas de contagem onde diferentes elementos estão organizados como se estivessem ao redor de um círculo. A definição de permutação simples permite calcular disposições destes objetos em fila, porém não se pode aplicar diretamente o mesmo princípio se estes estiverem ao redor de um círculo. Para este caso faz-se necessário o estudo método específico, o qual denomina-se permutação circular. Os dois problemas seguintes, mostram as diferenças ao realizar tais contagens.

Problema 5 (Permutação Simples).

Ana **(A)**, Benedita **(B)** e Cláudia **(C)**, precisam formar uma fila. As possíveis configurações são:

A C B	B A C	C B A
A B C	C A B	B C A

Neste caso, cada fila corresponde a uma permutação simples e o número total de configurações possíveis, pode ser calculada de acordo com a equação (4). Isto é

$$P_n = n.(n-1).(n-2)\ldots.3.2.1$$

$$P_3 = 3.2.1 = 6$$

$$P_3 = 6$$

Pode–se formar 6 filas distintas com as três pessoas.

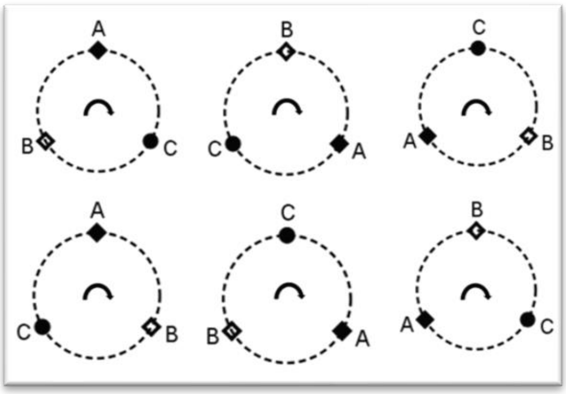
Problema 6 (Permutação Circular).

Considere que Ana **(A)**, Benedita **(B)** e Cláudia **(C)**, devam organizar-se de modo a formar um círculo. De quantos modos isso pode ser feito?

Solução:

Organizando-as em torno de um círculo, conforme figura (**Figura 15**), é possível ver todas as disposições possíveis.

Figura 15 – Representação de A, B , C em círculo.

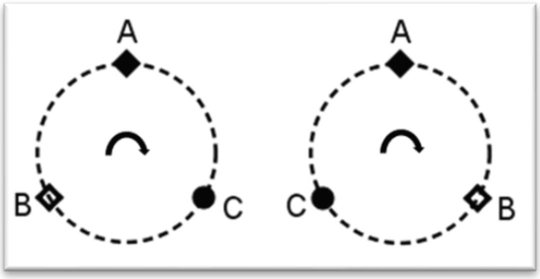


Fonte: Acervo do Autor.

Quando elementos são organizados ao redor de um círculo, cada disposição possível é uma permutação circular. Neste caso o que importa é a posição relativa dos objetos entre si. Duas permutações circulares são idênticas, se e somente se, quando se percorre a circunferência, no mesmo sentido, a partir de um mesmo ponto e se encontram elementos que formam sequencias iguais (HAZZAN, 2013).

Tem-se, portanto, apenas duas maneiras distintas de dispor os três elementos em um círculo, conforme é mostrado na figura (**Figura 16**).

Figura 16 - Representações distintas de A, B e C em torno de um círculo



Fonte: Acervo do autor, construída no Geogebra.

O **Problema 5**, mostrou que, Ana **(A)**, Benedita **(B)** e Cláudia **(C)**, ao trocar de posição entre si, podem formar seis filas distintas, pois qualquer mudança de posição entre elas acarreta uma formação diferente, tem –se então uma situação envolvendo permutação simples com três elementos.

No **Problema 6**, duas formações diferem pela posição relativa entre elas, e para calcular o total de configurações sem repetição, pode-se fixar, por exemplo, Ana **(A)** e permutar as duas outras, conforme mostrou na figura (**Figura 16**), portando o que diferencia a permutação simples da circular é que nesta segunda, quando se tem *n* elementos, para evitar repetições, fixa –se um deles e permutam-se os (*n* - 1) restantes. Com a ideia apresentada, é possível demostrar uma expressão para calculá-las. Morgado et al (2016), representa o número de permutações circulares de um conjunto de *n* objetos, por:

$$(PC)_n \tag{5}$$

Uma forma de justificar a expressão para o cálculo de permutações circulares com *n* elementos distintos é, em primeiro momento desconsidere as disposições equivalentes por rotação, gerando, portanto, *n*!. Como tem-se *n* disposições equivalentes, por rotação, as distintas podem ser calculadas de acordo com a expressão:

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} \tag{6}$$

$$(PC)_n = (n-1)! \tag{7}$$

Outra maneira de se obter tal expressão é tomar qualquer um dos elementos como referencial e permutar os demais (n – 1). Neste caso, o resultado é calculado da seguinte maneira: Como o que importa é a posição relativa dos n objetos, há 1 modo de colocar o primeiro no círculo (ele será único) e servirá de referência para a colocação dos (n - 1) restantes, os quais podem ser organizados de $(n-1)!$ modos. Pelo PFC, tem-se:

$$(PC)_n = 1.1.2.3 \ldots (n-1) \tag{8}$$

$$(PC)_n = (\,n-1)! \tag{9}$$

Com a expressão (9) problemas envolvendo permutação circular podem ser resolvidos sem a necessidade de representação das formações. O próximo subtópico tratará de um outro método de contagem, o das combinações simples.

2.5 Combinações Simples

Os problemas já abordados, caracterizaram–se por agrupamentos ordenados, nos quais a mudança de posição de um elemento, ocasiona a uma configuração diferente da anterior, como os números 123 e 321, que representam quantidades distintas pela troca de posição de dois algarismos. Em combinatória uma grandes quantidades de problemas referem-se aos agrupamentos em que a permutação dos elementos, não implica na criação de um novo. A estes casos, chama-se combinação simples e o conceito será introduzido com o auxílio do problema seguinte.

Problema 7

João tem cinco filhas: Ana (a), Benedita (b), Cláudia (c), Débora (d) e Edna (e). Ele deve escolher duas delas para acompanha-lo em uma viagem. Quantas são as escolhas diferentes que ele pode fazer?

Solução:

A primeira pode ser escolhida de 5 maneiras, para a segunda, restam 4 possibilidades. Pelo PFC, o total de escolhas é:

$$5.4 = 20.$$

Nesse problema, João devia escolher duas filhas, não importando a ordem, ou seja, {Ana, Benedita} e {Benedita, Ana}, são indiferentes. Desta forma, do resultado (20), cada dupla foi contada duas vezes, então o total de escolhas que João poderá fazer é:

$$\frac{5.4}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

João tem 10 opções de escolher duas filhas para acompanha-lo, as quais podem ser representadas:

{a, b},{a, c},{a, d},{a, e},{b, c},{b, d},{b, e},{c, d},{c, e},{d, e}.

A ampliação da ideia utilizada nesta situação conduz a definição de combinação simples.

Fomin(2014), apresenta a definição, a partir da ideia. Supondo que se precise escolher um grupo não com duas pessoas, mas com *p* pessoas, de um total de *n* e não de cinco. O número de maneiras que isso pode ser feito é chamado de combinações de *p* elementos escolhidos entre *n* elementos. Morgado et al (2016), a define, como sendo cada subconjuntos com *p* elementos do conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Representa-se combinação de *n* elementos tomados *p* a *p*, com a notação:

$$C_n^p, \qquad C_{n,p} \qquad ou \quad \binom{n}{p} \tag{10}$$

Onde se lê combinação de "*n* escolhe *p*".

Sejam p e n números naturais, com $p \leq n$. As diferentes maneiras que se pode selecionar *p* elementos de um grupo de *n*, escolhendo um a um, pode ser calculado pelo PFC, resultando na expressão:

$$n.(n-1).(n-2)\dots\big(n-(p-1)\big) = n.(n-1).(n-2)\dots(n-p+1) \tag{11}$$

Como cada combinação simples é uma escolha não ordenada de p elementos distintos de um conjunto de n elementos e cada grupo da lista (11) foi contado $p!$, o número de combinações simples formadas é:

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} \tag{12}$$

Multiplicando o numerador e o denominador da equação (12), por $(n-p)!$, chega-se a:

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} \cdot \frac{(n-\ p)!}{(n-p\ )!} \tag{13}$$

Após uma simplificação dos termos do numerador e reagrupamento no denominador, obtém-se,

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \tag{14}$$

As equações (12), (13) e (14) são equivalentes e permitem o cálculo do número de combinações simples.

Dependendo do autor em estudo, é possível encontrar diferentes representações para combinações simples, tais como C_n^p e $C_{n,p}$. Outra importante notação é $\binom{n}{p}$, denominada de número binomial *n* escolhe *p*, e tem o mesmo valor de C_n^p, ou seja:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = C_n^p \tag{15}$$

Da expressão (15), surgem os importantes resultados.

$\binom{2}{1} = 2$, existem duas maneiras de escolher 1objeto de um grupo de dois.

$\binom{n}{1} = n$, existem *n* maneiras de escolher 1objeto de um grupo de *n*.

$\binom{n}{n} = 1$, existe uma maneira de escolher n objetos de um grupo de n.

$\binom{n}{0} = 1$, existe uma maneira de não escolher nenhum objeto de um grupo de *n*.

A seguir, enunciam-se e demostram-se duas propriedades: Combinações complementares e Relação de Stifel[15].

2.5.1 Combinações Complementares.

Para todos os inteiros não negativos *n* e *p*, com $0 \leq p \ \leq n$, vale a relação:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \tag{16}$$

Demonstração:

Sejam n e p inteiros não negativos, com $0 \leq p \leq n$. Utilizando a expressão (15) para calcular $\binom{n}{s}$, com $s = n - p$ obtém-se:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$\binom{n}{s} = \frac{n!}{s!\,(n-s)!}$$

Substituindo $s = n - p$, chega-se a :

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,(n-(n-p))!}$$

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}.$$

$$\therefore \qquad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Pode-se justificar essa propriedade com o argumento de que escolher *p* pessoas de um grupo de *n* pessoas, é equivalente a não escolha de (*n* – *p*) delas.

[15] **Michael Stifel**: matemático alemão (1486 – 1567), com pesquisas em aritmética e álgebra.

2.5.2 Relação de Stifel.

Para quaisquer inteiros n e p, com $n \geq 1 \ e \ \ 0 \leq p \leq n-1$, vale a identidade:

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1} \tag{17}$$

Demonstração:

$$C_n^p + C_n^{p+1} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!\,(n-(p+1))!}$$

$$= \frac{n!}{p!\,(n-p)(n-p-1)!} + \frac{n!}{(p+1)!\,p!\,(n-p-1)!}$$

$$= \frac{n!}{p!\,(n-p-1)!}\left[\frac{1}{(n-p)} + \frac{1}{(p+1)}\right]$$

$$= \frac{n!}{p!\,(n-p-1)!}\left[\frac{n+1}{(\,p+1)(n-p)}\right]$$

$$= \frac{(n+1)n!}{(p+1)p!\,(n-p)(n-p-1)!}$$

$$\frac{(n+1)!}{(p+1)!\,(n-p)!} = C_{n+1}^{p+1}$$

$$\therefore \qquad C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}\,.$$

Morgado et al(2016) justifica esta propriedade, com a argumentação: Considerando um grupo formado por uma mulher e *n* homens, o número de modos de selecionar um subgrupo formado por $(p+1)$ pessoas é:

$$\binom{n+1}{p+1} \qquad \text{(I).}$$

Para selecionar um subgrupo formado pela mulher e por *p* homens, tem-se as opções expressas por:

$$1\text{x}\binom{n}{p} = \binom{n}{p} \qquad \text{(II)}.$$

De maneira análoga, o número de modos de selecionar um subgrupo com $(p+1)$ pessoas formado só por homens, é:

$$\binom{n}{p+1} \qquad \text{(III)}.$$

Como o total de subgrupos é a soma do número de subgrupos nos quais a mulher participa com o número de subgrupos dos quais a mulher não participa, tem-se então:

$$\text{(I)} = \text{(II)} + \text{(III)}$$

$$\therefore \quad \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

Os números binomiais quando dispostos em linhas e colunas, geometricamente, formam um triângulo, denominado Triângulo Aritmético de Tartaglia [16]-Pascal, ou simplesmente Triângulo de Pascal[17], e pode ser utilizado para calcular os coeficientes do desenvolvimento de potências do tipo $(x+y)^n$, com *x* e *y* reais e *n* inteiro positivo que se denomina de Binômio de Newton. A seguir será feito uma breve abordagem desses assuntos, pois o estudo detalhado foge aos objetivos desse trabalho.

2.6 O Triângulo de Pascal.

Organizando em linhas e colunas as combinações formadas com: $0, 1, 2, 3, \dots, n$, elementos, tomados *p* a *p*, com $0 \le p \le n$, obtém –se o triângulo de Pascal , conforme mostra a figura (**Figura 17**).

[16]**Tartaglia** (1499-1557): pseudônimo de Niccolò Fontana, matemático italiano famoso por sua solução algébrica de equações cúbicas.
[17] **Blaise Pascal** (1623-1662): físico, matemático, filósofo e teólogo francês, influente em diversas áreas da matemática. Em correspondência com Fermat, lançou as bases para a teoria das probabilidades.

Figura 17 - Representação do Triângulo de Pascal.

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0}\binom{1}{1} \\ \binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\ \binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\ \binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\cdots\binom{n}{n} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{cccccc} \binom{0}{0} & & & & & \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \cdots & \binom{n}{n} \end{array}$$

Fonte: Acervo do Autor.

Calculando-se os números binomiais das cinco (5) primeiras linhas, obtêm-se a configuração da figura, (**Figura 18**).

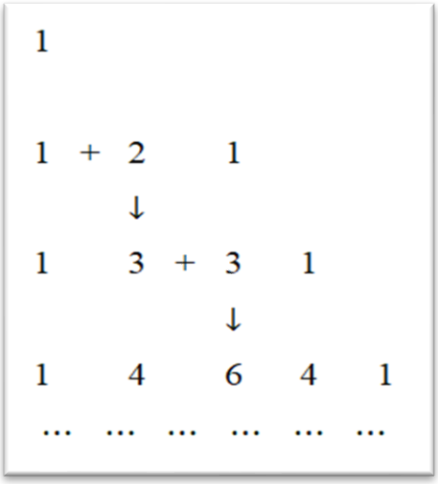
Figura 18 - Triângulo de Pascal, calculados os binomiais

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\quad 1 \\ 1\quad 2\quad 1 \\ 1\quad 3\quad 3\quad 1 \\ 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Fonte: Acervo do Autor.

A construção do Triângulo da figura (**Figura 18**) pode ser ampliada até a linha *n e* coluna *p*. A maneira para se fazer isso é usando a relação de Stifel (a soma de dois números do triângulo localizados lado a lado é igual ao número localizado imediatamente abaixo do número da direita), conforme esquema mostrado na figura, (**Figura 19**).

Figura 19 – Construção do Triângulo de Pascal, usando a relação de Stifel.



Fonte: Acervo do Autor.

A seguir, será definido o Binômio de Newton[18] e sua relação com o Triângulo de Pascal.

2.7 Binômio de Newton.

Se x e y são números reais e n é um inteiro positivo, o desenvolvimento da expressão $(x+y)^n$, é conhecido como fórmula do Binômio de Newton. Morgado et al (2016), representa por:

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} y^p x^{n-p} \qquad (18).$$

Reescrevendo em função dos coeficientes binomiais, chega-se a expansão:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} y^0 x^n + \binom{n}{1} y^1 x^{n-1} + \binom{n}{2} y^2 x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} y^n x^0 \qquad (19).$$

Demonstração:

O desenvolvimento do termo $(x+y)^n$, pode ser escrito da seguinte maneira:

$$(x+y)^n = (x+y).(x+y).(x+y)\cdots(x+y).$$

---

[18] **Isaac Newton** (1643-1727): Físico e matemático inglês. Sua obra, princípios matemáticos da filosofia natural é considerada uma das mais influentes na história da ciência.

Para obter os termos do desenvolvimento do produto, escolhe-se em cada parêntese um x e um y e multiplica-os. Para cada valor de p, com $0 \leq p \leq n$, ao se escolher y em p dos parênteses, x será escolhido em $(n-p)$ parênteses, e o produto $y^p x^{n-p}$. Isso pode ser feito usando combinação simples de $\binom{n}{p}$ modos. Assim, $(x+y)^n$, é uma soma onde há para cada $k \in \{1,2,3,\ldots,n\}$, $\binom{n}{p}$ parcelas iguais a $y^p x^{n-p}$, portanto, pode-se escrever:

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} y^p x^{n-p}.$$

O desenvolvimento $(x+y)^n$ possui $(n+1)$ termos, e seus coeficientes podem ser obtidos a partir do Triângulo de Pascal, conforme figura (**Figura 20**).

Figura 20 - Relação entre o binômio de Newton e o Triângulo de Pascal.

$(x+y)^0$	1	1
$(x+y)^1$	$x+y$	1 1
$(x+y)^2$	$x^2+2xy+y^2$	1 2 1
$(x+y)^3$	$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$	1 3 3 1
$(x+y)^4$	$x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$	1 4 6 4 1
$\vdots$	... ...	... ...

Fonte: Acervo do Autor.

Com o estudo de combinação simples, encerram- se os métodos de contagem para os agrupamentos simples, ou seja, aqueles formados por elementos distintos. Nos dois subtópico seguintes, serão abordadas as permutações com elementos repetidos e combinações completas, que são agrupamentos onde os elementos não são necessariamente distintos.

2.8 Permutações com Elementos Repetidos.

No estudo de combinatória, são frequentes os problemas que envolvem contagens de anagramas[19]. Para calcula-los, nos casos em que a palavras que não possui letras repetidas, usa-se o conceito de permutação simples, conforme o problema seguinte.

Problema 8.

Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra ROMA?

Solução:

Cada anagrama é uma permutação das letras R, O, M, A, três exemplos são: ROMA, AMOR (duas palavras com significado), RMOA(‘palavra’ sem significado).

O número total de anagramas pode ser calculado, permutando as quatro letras da palavra, ou seja, pode-se aplicar a expressão (3), para n = 4.

$$P_n = n! = n.(n-1).(n-2)\ldots.3.2.1$$

$$P_n = n.(n-1).(n-2)\ldots.3.2.1$$

Substituindo n por 4, pois tem-se 4 letras, obtém-se:

$$P_4 = 4!.$$

$$P_4 = 4.3.2.1.$$

$$P_4 = 24.$$

É possível formar 24 anagramas com as letras da palavra ROMA.

O problema seguinte, também de anagramas, envolve um fator que o diferencia do anterior, e isso deve-se ao fato de que na palavra proposta, existem letras que se repetem o que nos remeterá ao conceito do cálculo de permutações com elementos repetidos.

---

[19] **Anagramas**: consiste na transposição ou rearranjo de letras de uma palavra, formando outras ‘palavras’ com ou sem sentido.

Problema 9.

Calcule o número de anagramas que se pode formar com as letras da palavra ABAETETUBA.

Solução:

Para formar os anagramas, tem-se que organizar 3A, 2B, 2E, 2T e 1U, nos 10 espaços que formam a palavra ABAETETUBA.

Para ocupar os 10 lugares, pode-se iniciar colocando as três (3) letras A, como a ordem entre elas não é importante, pois são iguais, isso pode ser feito usando a expressão (14), assim:

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

Substituindo na expressão, $n = 10\ e\ p = 3$, chega-se:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10!}{3!\,7!} \qquad (I).$$

Posicionadas as três (3) letras A, restam sete (7) espaços, que de maneira análoga, faz-se o posicionamento das duas (2) letras B, obtendo assim:

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!\,(7-2)!} = \frac{7!}{2!\,5!} \qquad (II).$$

Para as letras E, restam 5 espaços, que podem ser ocupados de:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} \qquad (III).$$

Para as letras T, restam três (3) espaços, que podem ser ocupados de:

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3!}{2!\,1!} \qquad (IV).$$

A letra U, que é única, estará definida.

Aplicando o P.F.C, obtém-se o produto:

$$(I).(II).(III).(IV) = \frac{10!}{3!\,7!}.\frac{7!}{2!\,5!}.\frac{5!}{3!}.\frac{3!}{2!}$$

Fazendo a simplificação algébrica, chega-se a:

$$(I).(II).(III).(IV) = \frac{10!}{3!\,.2!\,.2!}.$$

$$(I).(II).(III).(IV) = \frac{3.628.800}{48} = 75.600.$$

Existem 75.600 anagramas distintos com as letras da palavra ABAETETUBA.

A solução do **Problema 9** serve de base para que se amplie o cálculo de permutação para o caso de n elementos em que existem elementos repetidos. Considere n elementos, dos quais: α são iguais a (A), β são iguais a (B) , . . . , λ são iguais a (L) e $(\alpha + \beta + \ldots + \lambda = n)$. Morgado (2016) representa o número de permutações com elementos repetidos por:

$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda} \qquad (20).$$

E apresenta para o cálculo, a expressão:

$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots,k,\lambda} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!} \qquad (21).$$

Demonstração:

Para ocupar os n lugares, pode-se iniciar posicionando os α elementos (A), como a ordem entre elas não é importante, pois são iguais, isso pode ser feito usando a expressão (14), tem-se então:

$$\alpha \; elementos \; (A) = C_n^{\alpha}.$$

Posicionados os α elementos (A), restam $(n - \alpha)$ espaços, para os β elementos (B), que pode ser feito de:

$$\beta \; elementos \; (B) = C_{n-\alpha}^{\beta}.$$

Prosseguindo com o posicionamento dos demais elementos, obtém-se:

$$\alpha\ objetos\ (A) = C_n^{\alpha}.$$
$$\beta\ objetos\ (B) = C_{n-\alpha}^{\beta}.$$
$$\vdots\ \vdots\ \vdots$$
$$\lambda\ objetos\ (L) = C_{n-\alpha-\beta-\ldots-k}^{\lambda}.$$

Aplicando o PFC, pode então calcular o total de permutações com elementos repetidos, utilizando a expressão:

$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots,k,\lambda} = C_n^{\alpha}.C_{n-\alpha}^{\beta}\ldots C_{n-\alpha-\beta-\ldots-k}^{\lambda}.$$

Fazendo a manipulação algébrica,

$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots,k,\lambda} = \frac{n!}{\alpha!\,(n-\alpha)!}\cdot\frac{(n-\alpha)!}{\beta!\,(n-\alpha-\beta)!}\cdots\frac{(n-\alpha-\beta-\ldots-k)!}{\lambda!\,(n-\alpha-\beta-\ldots-k-\lambda)!}.$$

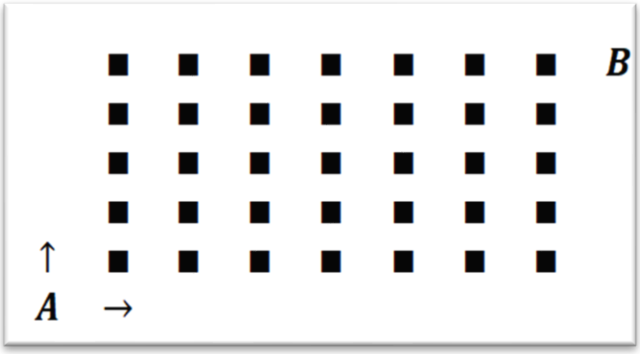
$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots,k,\lambda} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}.$$

Esta expressão calcula o número de permutações com elementos repetidos, utilizando o cálculo de fatorial. Problemas desta natureza, podem apresentar variações que exigem inicialmente associa-los com a ideia de permutação, para então resolve-lo. Como pode-se perceber no próximo problema, presente no processo seletivo da Universidade Estadual Paulista (UNESP, 2010).

Problema 10.

A figura a seguir mostra a planta de um bairro de uma cidade. Uma pessoa quer caminhar do ponto A ao ponto B por um dos percursos mais curtos. Assim, ela caminhará sempre nos sentidos “de baixo para cima” ou “da esquerda para a direita”. Calcule o número de percursos diferentes que essa pessoa poderá fazer de A até B.

Figura 21 - Representação da planta de um Bairro.



Fonte: Acervo do autor.

Solução:

Para ir do ponto **A** ao ponto **B**, a pessoa deve deslocar-se sete vezes para a direita (***D***) e cinco vezes para cima (***C***), como exemplo, duas opções de trajetos são: (***DDDDDDDCCCCC***) e (***CCCCCDDDDDDD***. Pode-se resolver o problema como se tivesse que contar os anagramas de uma palavra de doze letras, sendo sete iguais e outras cinco também iguais. Trata-se de um problema de permutação com elementos repetidos e aplicando a expressão (21). Isto é,

$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots,k,\lambda} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}$$

Substituindo na expressão $n = 12, \alpha = 7\ e\ \beta = 5$. Obtém-se que,

$$P_{12}^{7,5} = \frac{12!}{7!\,5!} = 792.$$

Existem 729 trajetos possíveis para ir do ponto A ao ponto B, obedecendo as restrições do problema.

O conceito de permutação com elementos repetidos, permite que se calcule o número de soluções inteiras não negativas de equações lineares com coeficientes unitários, este tipo de equação pode ser utilizada para o cálculo do número de combinações com elementos repetidos, como se verá adiante.

2.9 Equações Lineares Com Coeficientes Unitários.

Para introduzir os conceitos de equação linear com coeficientes unitários e combinações completas, toma-se como exemplo o problema a seguir:

Problema 11.

De quantos modos uma pessoa pode comprar cinco (5) picolés em uma sorveteria que oferece sete (7) sabores distintos?

Solução:

No ato da compra a pessoa pode optar por sabores todos distintos ou não. Considerando: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, as quantidades que serão compradas de cada picolé, pode-se representar o problema pela equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ x_4 + x_5 + \ x_6 + \ x_7 = 5 \qquad (22).$$

A equação representativa da situação, é um exemplo de equação linear com coeficientes unitários. Bezerra (2018), a define da forma:

$$x_1 +. x_2 . + \ldots + \ x_n = p \qquad (23).$$

Onde $n \geq 1$ e p é um número natural.

A solução da equação (22) é a n-upla:

$$\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \qquad (24).$$

De números inteiros tal:

$$\alpha_1 + \ \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = p \qquad (25).$$

É uma solução inteira da equação. Se para todo $i,\ a_i \geq 0$, considera-se que β é uma solução inteira não negativa e se $a_i > 0$, então diz-se que β é uma solução inteira positiva .

Para contar o número de soluções inteiras não negativas ou positivas de uma equação linear com coeficientes unitários, usa-se o esquema "traço-bola". Uma bolinha (•) para representar a unidade e um traço (|) para separar duas incógnitas.

Aplicando o método “traço-bola” na equação (22), referente ao problema da compra dos picolés, tem-se:

$$x_1 +. x_2. + \ x_3 + \ x_4 +. x_5. + x_6 + \ x_7 = 5.$$

Possíveis soluções para a equação são:

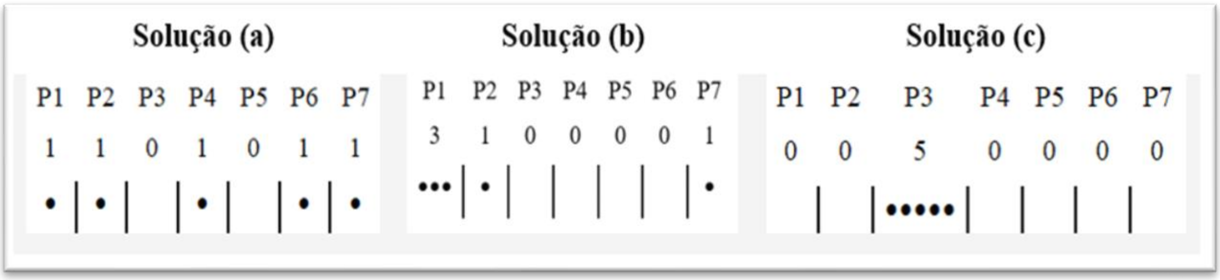
$$(x_1,\ x_2, x_3,\ x_4, x_5,\ x_6, x_7) = (1, 1,0, 1,0,1,1). \quad (26).$$

$$(x_1,\ x_2, x_3,\ x_4, x_5,\ x_6, x_7) = (3, 1,0,0,0,0,1). \quad (27).$$

$$(x_1,\ x_2, x_3,\ x_4, x_5,\ x_6, x_7) = (0, 0,5, 0,0,0,0). \quad (28).$$

Para representar as soluções (26), (27) e (28), no esquema “traço-bola”, deve-se lembrar que cada unidade será substituída por uma bola e que elas serão separadas por traços em sete grupos, denominados: P1, P2, P2, P4, P5, P6 e P7 (pois existem sete escolhas diferentes de sabores de picolés), tem-se as representações expressas na figura (**Figura 22**):

Figura 22 – Representação de soluções da equação.



Fonte: Acervo do autor.

Com a representação acima, cada solução pode ser representada por uma fila de 5 bolas e 6 traços, o que permite tratar o problema como se fosse uma permutação com onze (11) elementos, sendo 5 iguais (bolas) e outros 6 iguais (traços).

Aplicando a expressão (21), Tem-se:

$$P_n^{\alpha,\beta,\dots,k,\lambda} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!}$$

Substituindo na expressão $n = 11, \alpha = 5\ e\ \beta = 6$. Obtém-se:

$$P_{11}^{5,6} = \frac{11!}{5!\,6!}.$$

$$P_{11}^{5,6} = \frac{11.10.9.8.7.6!}{5!\,6!} = 462.$$

O resultado mostrou que existe 462 maneiras distintas, de uma pessoa efetuar a compra de cinco (5) picolés, numa sorveteria que ofereça sete (7) sabores diferentes.

Pode-se utilizar a ideia aplicada ao problema anterior, para generalizar e chegar a ao número de soluções inteiras não negativas da equação (23).

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p$$

Onde $n \geq 1$ e p é um número natural.

No esquema “traço-bola”, cada solução, consiste em grupos de *p* bolas, e para separa-las em *n* grupos, são necessárias (*n* – 1) barras. Assim o número de soluções inteiras não negativas para a equação, coincide com as permutações de $(p + n - 1)$ elementos, dos quais p e $(n - 1)$ repetem. Aplicando a expressão (21), tem-se:

$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots,k,\lambda} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}$$

Substituindo na expressão: n por $(p + n - 1)$, α por p e β por $(n - 1)$, e fazendo a manipulação algébrica, chega-se a:

$$P_{n+p-1}^{p,(n-1)} = \frac{(n + p - 1)!}{p!\,(n - 1)!} \qquad (29).$$

Pode-se escrever a (29) em termos da expressão (14), da seguinte maneira.

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n - p)!}.$$

Escolhendo-se p, de um conjunto de $(n+p-1)$ elementos, tem-se:

$$C_{n+p-1}^{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!} \quad (30).$$

$$C_{n+p-1}^{p} = P_{n+p-1}^{p,(n-1)} \quad (31).$$

As expressões (30), permite que se calcule o número de soluções inteiras não negativas de uma equação linear com coeficientes unitários. A determinação do número de soluções desta equação, permite que se aborde um tipo de agrupamento não ordenado, denominado de combinação completa ou combinação com repetição

2.10 Combinações Completas.

Bezerra, (2018), define combinação completa ou combinação com elementos repetidos, de classe *p* de *n* objetos, a toda escolha não ordenada de *p* objetos, distintos ou não, dentre os *n* objetos dados e representa por:

$$CR_n^p \quad (32).$$

E para o cálculo do número de combinações completas, define a expressão:

$$CR_n^p = P_{n+p-1}^{p,n-1} = C_{n+p-1}^{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!} \quad (33).$$

Demonstração:

De um conjunto formado por *n* elementos distintos, representados por: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, deve-se escolher *p* deles, com ou sem repetição. Considerando $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$, as quantidades de cada um dos elementos, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ que serão escolhidos, pode-se representar a situação pela equação seguinte:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p.$$

Como, $x_i \geq 0$, para todo $i = 1,2,3, \dots, n$.

A escolha consistirá em determinar o número de soluções inteiras não negativas para a equação acima, ou seja, a expressão (33), conforme já demonstrado.

$$C_{n+p-1}^{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!} = P_{n+p-1}^{p,(n-1)}\ .$$

Pode-se então calcular o número de combinações completas, pela expresão:

$$CR_{n}^{p} = \ P_{n+p-1}^{p,n-1} = C_{n+p-1}^{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}\ .$$

O problema a seguir apresenta duas situações envolvendo contagem, que podem ser resolvidas utilizando combinação completa.

Problema 11.

O Sr. Francisco tem quatro (4) filhas. Ao voltar do trabalho, passou em uma loja e comprou uma cartela contendo dez (10) pregadores de cabelo para distribuir entre elas. De quantos modos ele pode fazer a divisão, se:

a) Não houver a necessidade de que toda filha receba pelo menos um pregador.
b) Toda filha deverá receber pelo menos um pregador.

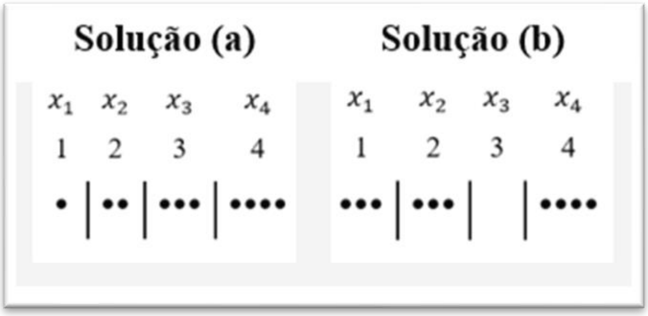
Solução**:**

Representando por: $x_{1,}\ x_{2,}\ x_{3,}x_{4,}$ a quantidade de pregadores que cada filha irá receber, pode-se representar a situação pela equação:

$$x_1 +\ x_2 +\ x_3 +\ x_4 = 10.$$

Para o item (a), $x_{1,}\ x_{2,}\ x_{3,}x_{4,}$ podem variar de zero (caso em que uma ou mais filha não recebe nenhum pregador) até dez (caso em que todos os pregadores serão dados a uma única filha). Duas possíveis soluções estão representadas na figura (**Figura 23**).

Figura 23 – Duas soluções para o problema



Fonte: Acervo do autor

Cada solução pode ser representada por uma fila com dez (10) bolas e três (3) traços. Para resolver, pode-se usar a expressão (21),

$$P_n^{\alpha,\beta,\ldots,k,\lambda} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}$$

Substituindo na expressão $n = 13, \alpha = 10\ e\ \beta = 3$. Obtém-se:

$$P_{13}^{10,3} = \frac{13!}{10!\,3!}.$$

$$P_{13}^{10,3} = \frac{13.12.11.10!}{10!\,3!} = 286.$$

Outra maneira é aplicar diretamente a expressão (33),

$$CR_n^p = P_{n+p-1}^{p,n-1} = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}.$$

Substituindo $n = 4$(quatro variáveis) e $p = 10$ (objetos a serem distribuídos). Chega-se a:

$$CR_4^{10} = P_{4+10-1}^{10,3} = C_{4+10-1}^4$$

$$CR_4^{10} = \frac{(4+10-1)!}{10!\,(4-1)!}.$$

$$CR_4^{10} = \frac{13!}{10!\,3!} = 286.$$

O resultado mostrou que existem 286 maneiras distintas, do Sr. Francisco, distribuir os dez pregadores entre suas filhas, atendendo as restrições do item (a).

Solução item (b).

Neste caso há a exigência que toda filha receba pelo menos um pregador, ou seja, o problema recairá na solução da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10. \qquad (*).$$

Para $x_1,\ x_2, x_3,\ x_4$, maiores que zero (0). Para que se obedeça esta restrição, basta fazer uma mudança de variável.

Fazendo:

$$x_1 = 1 + y_1$$
$$x_2 = 1 + y_2$$
$$x_3 = 1 + y_3$$
$$x_4 = 1 + y_4$$

Substituindo em $(*)$ e fazendo-se a manipulação algébrica, chega-se a :

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6 \qquad (**).$$

Resolvendo $(**)$, de maneira análoga ao item (a).

$$CR_n^p = \frac{(n + p - 1)!}{p!\,(n-1)!}.$$

Substituindo na expressão, *n* = 4 e *p* = 6, tem-se:

$$CR_4^6 = \frac{(4 + 6 - 1)!}{6!\,(4-1)!}.$$

$$CR_4^{10} = \frac{13!}{10!\,3!} = 286.$$

O resultado mostrou que existem 84 maneiras distintas, de dividir dez (10) objetos em quatro (4) grupos, de modo que nenhum grupo fique sem elemento.

3. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO.

No capítulo anterior, desenvolveu-se a fundamentação teórica ao estudo dos métodos de contagem. Este capítulo apresenta ao ensino de combinatória, uma proposta que se baseia na utilização de problemas. Busca-se instigar a curiosidade, levando os alunos a pensarem em estratégias que os conduzam a solução da situação apresentada. Como atesta Allevato ao considerar que:

> A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas tem se mostrado "como um contexto bastante propício a construção de conhecimento, colocando o aluno no centro das atividades de sala de aula, sem prescindir do fundamental papel desempenhado pelo professor como organizador e mediador" (ALLEVATO, ONUCHIC, 2014, p. 48)

Ao colocar o aluno em uma situação de questionamento, espera-se que ele possa pensar por si próprio, entende-se que, neste caso ele é levado a pensar matematicamente e desenvolver estratégias de resolução. A temática trazida neste capítulo propõe o ensino método dos métodos de contagem com a utilização de resoluções de problemas.

3.1 A Contagem de acordo com a BNCC.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um conjunto de orientações, que norteiam os currículos da educação básica, tanto de escolas públicas quanto de particulares no Brasil. Está estruturada em dez competências gerais a serem desenvolvidas durante a Educação Básica, define-se competência como a mobilização de conhecimentos, os quais incluem-se conceitos e procedimentos, necessários para resolver situações complexas do cotidiano, do exercício da cidadania e do mundo do trabalho. Em se tratando do ensino da matemática, observa-se, a valorização como instrumentos pedagógicos, de conhecimentos sobre os aspectos físicos, sociais e culturais que compõem o mundo dos alunos, como pode-se observar:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
>
> 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018).

3.2 Três diferentes abordagens.

Para consolidar uma proposta, fez-se uma abordagem comparativa de três diferentes obras, a saber Fundamentos de Matemática Elementar (HAZAN, 2013), Contexto & Aplicações (DANTE, 2016) e Análise Combinatória e Probabilidade (MORGADO, 2016). A partir dessa análise, procurou-se compreender as contribuições de cada autor par que fosse possível fundamentar a elaboração de atividades de contagem a partir de soluções de problemas.

3.2.1 Fundamentos de Matemática Elementar.

A Primeira obra abordada é o 5º volume da coleção intitulada: Fundamentos de Matemática Elementar, Samuel Hazzan. Destina-se ao estudo de combinatória e probabilidade. Suas primeiras edições foram produzidas na década de 1970, e por sua amplitude e aceitação ainda hoje permanece disponível para venda, ocupando destaque em preferência como pode-se verificar nos dados apresentados no site[20]. O livro é reconhecido por professores da educação básica de Abaetetuba, o que o credenciou a fazer parte desta análise. O exemplar em utilizado, é de 2013, 8ª edição. E em sua apresentação, fica evidenciado a que se propõe.

> Fundamentos de Matemática Elementar é uma coleção elaborada como o objetivo de oferecer ao estudante uma visão global da matemática, no Ensino Médio. Desenvolvendo os programas em geral adotados nas escolas, a coleção dirige-se aos vestibulandos, aos universitários que necessitam rever a matemática elementar e também, como é obvio, aqueles alunos de ensino médio cujo interesse se focaliza em adquirir uma formação mais consistente na área da matemática (HAZZAN, 2013).

[20]https://www.amazon.com.br/Fundamentos-Matem%C3%A1tica-Elementar-Samuel-Hazzan/

A partir da apresentação, e tendo como foco o que o autor cita como uma formação mais consistente em matemática, os conteúdos seguem uma ordem lógica na abordagem de conceitos e propriedades. Preocupa - se também em demonstrar proposições e Teoremas. Ao introduzir os métodos de contagem, através do PFC, o faz utilizando o formalismo matemático, conforme figura (**Figura 24**):

Figura 24 - Princípio Fundamental da Contagem: Lema 1.

II. Princípio fundamental da contagem

3. Tal princípio consta de duas partes (A e B) ligeiramente diferentes. Antes de enunciar e demonstrar este princípio, vamos provar dois lemas (teoremas auxiliares).

4. Lema 1

Consideremos os conjuntos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Podemos formar $m \cdot n$ pares ordenados (a_i, b_j) em que $a_i \in A$ e $b_j \in B$.

Demonstração:

Fixemos o primeiro elemento do par e façamos variar o segundo. Teremos:

$$m \text{ linhas} \begin{cases} (a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_n) \rightarrow n \text{ pares} \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_2, b_n) \rightarrow n \text{ pares} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ (a_m, b_1), (a_m, b_2), \dots, (a_m, b_n) \rightarrow n \text{ pares} \end{cases}$$

O número de pares ordenados é então $\underbrace{n + n + n + \dots + n}_{m \text{ vezes}} = m \cdot n$.

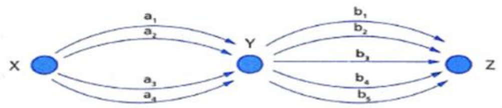
Fonte: Hazzan, (2013, p.2)

Demostrado o Lema 1, apresenta o exemplo da figura (**Figura 25**), no qual se evidencia o formalismo matemático para modelar um problema do cotidiano.

Figura 25 – Aplicação do PFC

5. Exemplos:

1º) Temos três cidades X, Y e Z. Existem quatro rodovias que ligam X com Y e cinco que ligam Y com Z. Partindo de X e passando por Y, de quantas formas podemos chegar até Z?



Sejam:
A o conjunto das rodovias que ligam X com Y e
B o conjunto das rodovias que ligam Y com Z:

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$

Cada modo de efetuar a viagem de X até Z pode ser considerado como um par de estradas (a_i, b_j) em que $a_i \in A$ e $b_j \in B$.

Logo, o número de pares ordenados (ou de modos de viajar de X até Z) é

$$4 \cdot 5 = 20.$$

Fonte: Hazzan, (2013, p.3).

Seguindo a mesma proposta, enuncia e demonstra o Lema 2, para depois definir e demonstra o PFC, que o faz em duas etapas, conforme figura (**Figura 26**).

Figura 26 - Enunciado do PFC (Parte A).

8. O princípio fundamental da contagem (parte A)

Consideremos r conjuntos

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}\} \quad \#A = n_1$$

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}\} \quad \#B = n_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_{n_r}\} \quad \#Z = n_r$$

então, o número de r-uplas ordenadas (sequências de r elementos) do tipo

$$(a_i, b_j, \ldots, z_p)$$

em que $a_i \in A$, $b_j \in B$ ... $z_p \in Z$ é

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r$$

Fonte: Hazzan, (2013, p.5).

Para demostrar essa primeira parte, o faz utilizando o ‘Princípio da Indução Finita’[21]. Logo em seguida enuncia e demonstra a parte B, do PFC, conforme imagem.

Figura 27 - Enunciado do PFC (Parte B).

10. O princípio fundamental da contagem (parte B)

Consideremos um conjunto A com $m(m \geq 2)$ elementos. Então o número de r-uplas ordenadas (sequências com r elementos) formadas com elementos distintos dois a dois de A é:

$$\underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot [m-(r-1)]}_{r \text{ fatores}}$$

Ou seja, se $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, o número de sequências do tipo

$$\underbrace{(a_j, a_\ell, \ldots, a_i, \ldots, a_k)}_{r \text{ elementos}}$$

com $\begin{cases} a_i \in A \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\} \\ a_i \neq a_p \text{ para } i \neq p \end{cases}$ é

$$\underbrace{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot [m-(r-1)]}_{r \text{ fatores}}$$

A demonstração é feita por indução finita, de modo análogo à feita na parte A.

Fonte: Hazzan, (2013, p.7)

Na sequência, apresenta 40 (quarenta) questões referentes à aplicação deste conceito, algumas das quais, resolvidas, servindo de modelo para as imediatamente seguintes. Vale destacar a observação feita pelo autor, logo após os exercícios, os quais denominou de consequências do princípio fundamental da contagem:

> O princípio fundamental da contagem nos fornece o instrumento básico para a Análise Combinatória; entretanto, sua aplicação direta na resolução de problemas pode às vezes tornar-se trabalhosa. Iremos então definir os vários modos de formar agrupamentos e, usando símbolos simplificados, deduzir fórmulas que permitam a contagem dos mesmos, em cada caso particular a ser estudado (HAZZAN, 2013).

---

[21] Principio da indução: Método utilizado para demonstrar ou construir definições.

Conforme citado, após definir e aplicar o PFC, aborda outros métodos, dividindo os problemas em casos de acordo com características específicas de cada tipo de agrupamento: arranjos com repetição, arranjos, permutações, combinações, permutações com repetição, partições não ordenadas e soluções inteiras e não negativas de equações lineares.

Os tópicos presentes nessa obra, são em geral apresentados pela introdução da definição, que em seguida é demonstrada e aplicada na solução de um problema. Esta obra atende ao que se propôs, servindo como fonte de pesquisa, principalmente para professores que buscam uma fundamentação teórica alicerçada em definições matemáticas. Quanto a utilização, dentro do contexto atual do Ensino Médio, a abordagem dada pode dificultar sua compreensão. Isto é:

> Se as fórmulas são apresentadas após ligeira abordagem e apresentação formal da definição de cada tipo de agrupamento, tal fato poderá gerar dificuldade por parte do aluno em reconhecer o tipo de agrupamento envolvido no problema e, consequentemente, a fórmula que deve utilizar. Com isso, o aluno estaria sendo induzido ao domínio da técnica, sem se preocupar com a interpretação do problema, o que na análise combinatória é fundamental. (Esteves 2001)

Conforme citado a apresentação de conceitos e fórmulas, sem antes uma situação problema, pode induzir a ideia de que os problemas de contagem se resumem a aplicação mecânica de fórmulas, sem muito sentido prático.

3.2.2 Matemática: Contexto & Aplicações.

A segunda obra analisada, o volume 2 da coleção matemática: contexto & aplicações, de Luiz Roberto Dante, (DANTE, 2016). Aprovada pelo MEC[22] e fez parte do catalogo de escolha do PNLD[23] 2018 , tendo sido a opção aprovada para uso nas Escolas da Rede Estadual, localizadas no município de Abaetetuba no triênio (2018, 2019, 2020).

Nesta obra, conteúdos, conceitos e procedimentos são introduzidos por meio de imagens e pequenos textos, seguidos de exemplos resolvidos e propostas, que em geral fazem uso dos “modelos” como método de aprendizagem. Em análise realizada pela equipe de avaliação do MEC, tem-se:

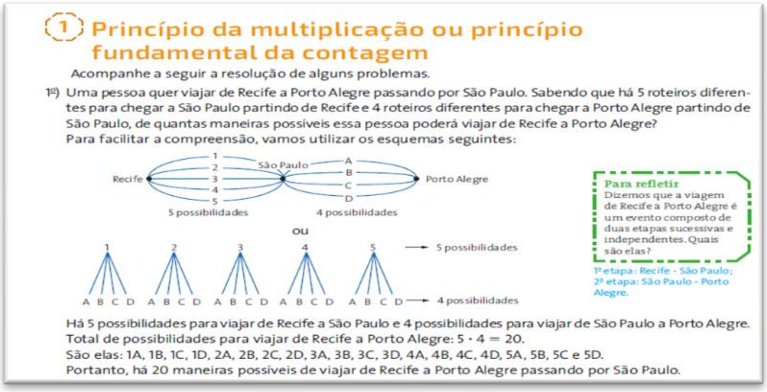
> Na abertura dos capítulos, imagens e pequenos textos buscam despertar o interesse dos estudantes pelo que será estudado. A apresentação dos conteúdos é feita por meio de explanações teóricas, seguidas de exercícios resolvidos, de fixação ou de aplicação. Há questões que dão oportunidade para os estudantes argumentar, formular hipóteses e generalizar. No entanto, poucas são as oportunidades de construção autônoma dos conceitos.(PNLD, 2018)

---

[22] **MEC:** Ministério da Educação
[23] **PNLD:** Programa Nacional do Livro Didático

Nesta obra a abordagem do PFC, utiliza uma atividade resolvida objetivando quantificar as possibilidades. Como auxilio a interpretação do problema proposto, é apresentado a árvore de possibilidades, conforme figura (**Figura 28**) :

Figura 28 - Apresentação do PFC, utilizando um exemplo.


1 Princípio da multiplicação ou princípio fundamental da contagem

Acompanhe a seguir a resolução de alguns problemas.

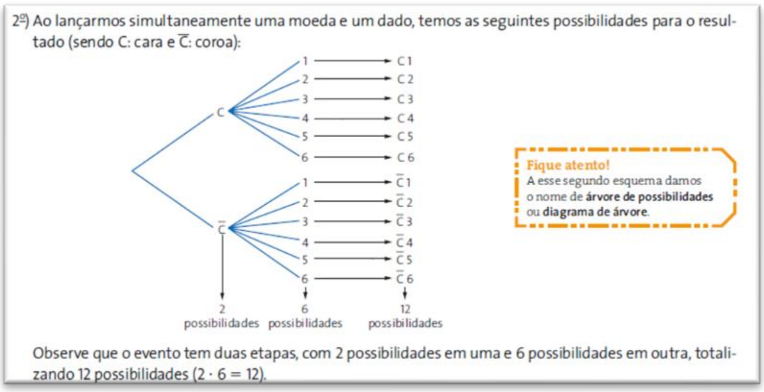
1º) Uma pessoa quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 roteiros diferentes para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Recife a Porto Alegre?
Para facilitar a compreensão, vamos utilizar os esquemas seguintes:

Há 5 possibilidades para viajar de Recife a São Paulo e 4 possibilidades para viajar de São Paulo a Porto Alegre.
Total de possibilidades para viajar de Recife a Porto Alegre: $5 \cdot 4 = 20$.
São elas: 1A, 1B, 1C, 1D, 2A, 2B, 2C, 2D, 3A, 3B, 3C, 3D, 4A, 4B, 4C, 4D, 5A, 5B, 5C e 5D.
Portanto, há 20 maneiras possíveis de viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo.

Fonte: Dante, (2016, p.204).

Em seguida, apresenta um problema, que para ser resolvido, utiliza a ideia apresentada no anterior, a árvore de possibilidades (probabilidades), conforme figura (**Figura 29**).

Figura 29 – Utilizando a árvore de probabilidades.


2º) Ao lançarmos simultaneamente uma moeda e um dado, temos as seguintes possibilidades para o resultado (sendo C: cara e $\overline{C}$: coroa):

Observe que o evento tem duas etapas, com 2 possibilidades em uma e 6 possibilidades em outra, totalizando 12 possibilidades ($2 \cdot 6 = 12$).

Fonte: Dante, (2016, p.204).

Apresentados os problemas iniciais, enuncia o PFC, conforme figura (**Figura 30**).

Figura 30 - Enunciado do PFC

Se um evento é composto de duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na 1ª etapa é m e para cada possibilidade da 1ª etapa o número de possibilidades na 2ª etapa é n, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto $m \cdot n$.

Esse é o **princípio fundamental da contagem**.

Observação: O produto dos números de possibilidades vale para qualquer número de etapas independentes.

Fonte: Dante, (2016, p.204).

Neste ponto, pode-se fazer um comparativo das abordagens dadas para resolver uma situação que apresenta a mesma problemática, conforme figuras (**Figura 25**) e (**Figura 28**) respectivamente. Para apesentar a solução, Hazzam, o faz utilizando uma representação matemática que considera o seu formalismo, enquanto que Dante não utiliza o mesmo rigor. Este pode ser um ponto a ser questionado, pois, ao abrir mão de uma fundamentação matemática que leve em consideração a apresentação e demonstração de propriedades que o justifiquem, pode-se passar a ideia de os métodos de contagem, resumem-se a problemas que podem ser resolvidos por raciocínios lógicos simples.

Nas obras analisadas, há um ponto em comum e que pode-se ser apontado como negativo que diz respeito aos conceitos de arranjo e combinação, apresentados de forma isolada. Batanero et al(1997) afirma que a maior dificuldade dos alunos em combinatória, deve-se ao fato de que os mesmos não conseguem identificar a operação correta que devem utilizar e além disso, quando acertam, ainda erram as próprias formulas. Associam-se estes erros a forma pela qual o conteúdo é apresentado, ou seja, a apresentação de fórmulas, depois de uma breve abordagem dos conceitos, pode levar o aluno ao domínio da técnica e não da interpretação do problema.

3.2.3 Análise Combinatória e Probabilidade SBM.

A terceira obra analisada foi a 10ª edição, da Coleção do Professor de Matemática, da SBM, lançada em 2016, com o título: Análise Combinatória e Probabilidade de autoria de Augusto César Morgado, João Bosco Pitombeira de Carvalho, Paulo Cesar Pinto Carvalho e Pedro Fernandes. Sua primeira edição foi publicada em 1991, como parte do projeto de treinamento de professores de matemática do 2º grau, financiado pela fundação VITAE. Em seu prefácio, apresenta uma proposta diferenciada, em relação apresentadas e analisadas neste trabalho em relação a combinatória:

> Apesar de repleta de problemas capazes de motivar os alunos, é considerada uma disciplina complicada, em que os alunos têm dificuldade de encontrar a fórmula correta para cada problema. Neste texto, procuramos resolver problemas de contagem através do uso de alguns princípios fundamentais, evitando, sempre que possível, recorrer ao uso de fórmulas. (MORGADO et al, 2016).

Esta abordagem, no qual se faz necessário, colocar -se na postura de quem deve praticar a ação, definindo a melhor estratégia para executar o que se pede, visa habituar o aluno a pensar, e a ver que problemas de contagem podem ser resolvidos com a utilização de estratégias e em muitos casos, sem exigir o uso de fórmulas. O estudo de combinatória a partir desta proposta, não é frequente em obras disponíveis para o Ensino Médio. Seu conhecimento se deu em decorrência da disciplina matemática discreta do Profmat, e do contato com autores da SBM.

Nessa obra um diferencial importante em relação as duas anteriormente analisadas, é que nela não há o estudo, como tópico separado, de arranjo. Problemas desta natureza são resolvidos através do PFC, eliminando a necessidade de diferenciar se o problema é de arranjo ou combinação, o que já foi apontado como um gerador de dificuldade ao ensino.

Considerando a forma como trata os problemas de contagem, colocando -se na postura de quem deve praticar a ação e sem abrir mão de uma fundamentação matemática que considera os formalismos matemáticos, essa obra, serviu de motivação para a criação das atividades a serem apresentadas como proposta de ensino.

3.3 Atividades com Problemas de Contagem.

Nessa seção, aborda-se uma sequência de atividades inclusa de proposta metodológica que pode ser útil no processo de ensino e aprendizagem. SÁ (2009), diz que o ensino de matemática com base em atividades, implica em colaboração mutua entre professor e aluno, e pode conduzir o aluno a constante construção das noções matemáticas, cabendo ao professor a condução das orientações. Como citado, essa seção corresponde a quatro (4) sequência de atividades, na ordem que se segue: Problemas iniciais envolvendo o PFC, aplicações diretas do PFC, problemas que exigem estratégias de resolução, problemas envolvendo diferentes métodos de contagem.

3.3.1 Problemas iniciais envolvendo o PFC.

Esta atividade é composta de três problemas distintos que visam instigar o uso intuitivo do PFC, conduzindo ao seu entendimento e mostrando que sua aplicação pode simplificar a solução do problema.

Proposta Metodológica

Para o **Problema 1**, propõe-se a utilização de papel cartão colorido, nas cores verde, amarelo e azul que serão recortados nos formatos de retângulos e círculos para resolver de forma prática a situação proposta. Espera-se que o aluno perceba que o que a solução consiste na tomada de duas decisões: (a) escolha da cor do retângulo, (b) escolha da cor do círculo, e que a cada par de cores escolhidas, consiste na obtenção de uma nova bandeira.

No **Problema 2**, como forma de tonar a questão mais atrativa, e sua solução significativa, propõe-se trabalhar com com cartas, contendo as imagens das camisas e shorts de times do futebol do brasileiro. A utilização das cartas possibilita a resolução através da contegem direta com o auxilio da visualização dos casos possiveis. Espera-se que haja associação com a ideia utilizada no problema anterior, e que o aluno possa conjecturar que a solução deste tipo de problema se dá pelo do P.F.C.

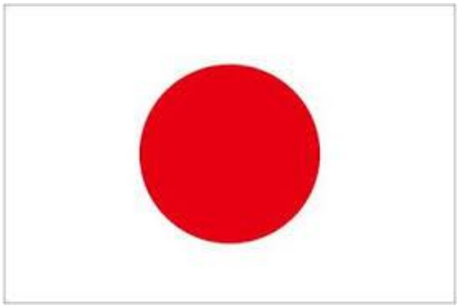
Para o **Problema 3**, escolhe –se dois alunos aleatoriamente na turma, entrega-se a cada um deles uma moeda idêntica, pede-se que cada uma faça o lancamento e anotem no quadro o resultado da dupla observada. Pede-se que repitam o procedimento até que não consigam observar mais resultados diferentes, tem-se então a resposta do problema.

De maneira analoga, faz-se o procedimento para os casos de três, cinco e dez lançamentos, conforme solicitado no problema, em seguida discute-se se esta foi a melhor estratégia de solução. Espera –se que percebam a independência dos resultados de cada etapa e que a solução usando o PFC. é mais viável do que se realizada pela enumeração dos resultados, o que fica evidenciado quando se aumentam o número de moedas envolvidas.

Problema 1

A Bandeira Nacional do Japão é chamada Hinomaru, uma palavra japonesa que, literalmente, significa “círculo do sol”. A proporção vertical-horizontal da bandeira é 2:3, o círculo está posicionado exatamente no centro e o diâmetro do círculo equivale a três quintos da medida vertical. A figura (**Figura 31**)

Figura 31 – Representação da bandeira japonesa.



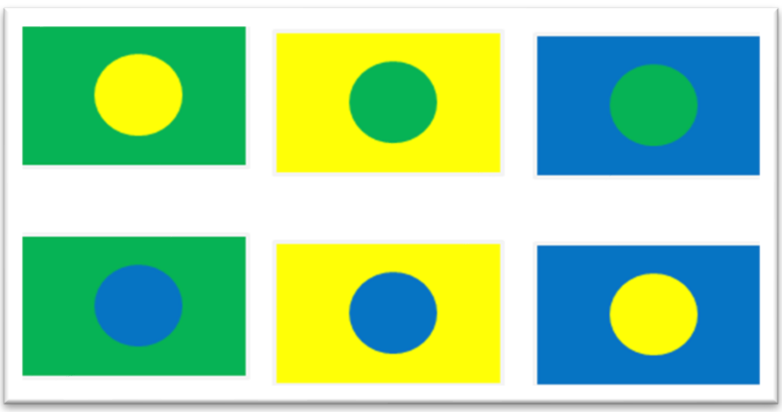
Fonte: acervo do autor.

Utilizando duas cores distintas, escolhidas dentre as cores: verde, amarelo e azul. Quantas novas bandeiras como o mesmo formato da japonesa, podem ser formadas?

Solução:

Da manipulação do material proposto, chega-se a configuração da figura (**Figura 32**), que mostra as possíveis bandeiras formadas e representa a resposta para o problema.

Figura 32 - Representação das possíveis bandeiras formadas.



Fonte: Acervo do autor.

Da resposta obtida, espera-se que os alunos reconheçam que o resultado poderia ser obtido atraves da multiplicação das cores (decisões), que correponde a aplicação do PFC.

$$\underline{3} \,.\, \underline{2} = 6,$$

Problema 2

De quantas maneiras distintas, uma pessoa pode vestir-se, usando uma camisa e um short, escolhidos dentre os mostrados na figura (**Figura** 33)?

Figura 33 – Camisas e shorts de times de futebol.

Fonte: acervo do autor.

Solução:

A solução consiste na tomada de duas decisões: Escolha da camisa (4 opções) e escolha da short (2 opções). Utilizando as cartas e fazendo a contagem direta, tem-se os pares representados da figura (**Figura34**):

Figura 34 – Solução utilizando as imagens das cartas.

Fonte: acervo do autor.

Resolvido usando a respresentação visual, pode-se mostrar a solução através do PFC.

$$4 \; . \; 2 = 8.$$

Há, portanto, oito modos distintos da pessoa vestir-se com as camisas e shorts do problema.

Problema 3

Uma moeda é lançada duas vezes sucessivamente. Quantas são as sequências possíveis de faces obtidas nesses lançamentos? E se fossem três, cinco e dez lançamentos?

Solução.

Utilizando-se uma moeda, é possível ver que em cada lançamento os possíveis resultados são Cara (K) ou Coroa (C). Para o caso de dois lançamentos sucessivos, tem-se os diferentes resultados.

Figura 35 - Representação cara, coroa

Fonte: acervo do autor.

Para dois lançamentos, os possíveis resultados são: (K, K), (K, C), (C, C), (C, K)

Dado o tempo necessário para que os alunos respondam por enumeração os outros casos pedidos, resolve-se com a utilização do PFC, obtendo as respostas para as diferentes quantidades de lançamentos, três, cinco e dez respectivamente.

$$\underline{2} \; . \; \underline{2} \; . \; \underline{2} = 8.$$

$$\underline{2} \; . \; \underline{2} \; . \; \underline{2} \; . \; \underline{2} \; . \; \underline{2} = 32.$$

$$\underline{2} \; . \; \underline{2} \; . \; \underline{2} \; . \; \underline{2} \; . \; \underline{2} . \; \underline{2} \; . \; \underline{2} \; . \; \underline{2} \; . \; \underline{2} \; . \; \underline{2} = 1024.$$

Faz-se a conversa com a turma para discutir qual foi a melhor estratégia de solução.

3.3.2 Aplicações diretas do PFC.

Esta atividade é composta por dois problemas. Espera-se que os alunos possam situar-se na situação apresentada, e percebam que a melhor maneira de obter a solução é através da aplicação direta do PFC.

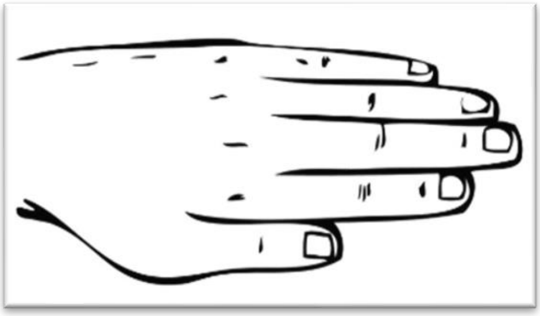
Proposta Metodológica.

Formando grupos de três a cinco alunos(as), apresenta-se as questões e pede-se que eles busquem respostas utilizando a maneira que julgarem melhor. Passado o tempo definido, faz-se a socialização das formas com que cada equipe chegou a sua resposta. Pretende-se verificar se já há o entendimento do PFC e suas aplicações.

Problema 1

Dispondo de esmaltes nas cores: vermelho, amarelo e rosa. De quantos modos diferentes pode-se pintar as cinco unhas da mão representada na figura (**Figura 36**), sendo que em cada unha, só se pode usar uma cor.

Figura 36 – Representação de uma mão.

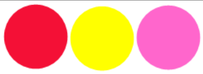
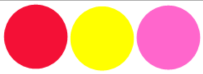
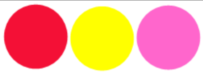
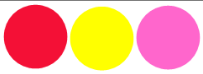
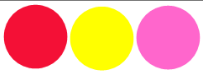


Fonte: https://imagensemoldes.com.br.

Solução:

O problema pode ser resolvido, lembrando que cada unha a ser pintada, é uma decisão de qual das três cores deve-se usar. Pode-se então aplicar o PFC, obtendo:

Tabela 2 - Opção de cores, por unha.

	Opção de cor**.**
Unha 1	
Unha 2	
Unha 3	
Unha 4	
Unha 5	

Fonte: acervo do autor.

Aplicando o PFC: $\underline{3}$. $\underline{3}$. $\underline{3}$. $\underline{3}$. $\underline{3}$ = 243.

Tem-se 243 diferentes maneiras de se pintar as unhas.

Problema 2

Para garantir a segurança e privacidade de um celular, é possível criar uma senha de acesso composta por seis dígitos, escolhidos dentre os números: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Quantas senhas diferentes podem ser formadas seguindo estas orientações?

Solução:

De maneira semelhande ao problema anterior deve-se decidir qual digito escolher para a formação da senha.

Digitos	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Total de escolhas	$\underline{10}$	$\underline{10}$	$\underline{10}$	$\underline{10}$	$\underline{10}$	$\underline{10}$.

Aplicando o PFC, tem –se:

$$\underline{10}.\ \underline{10}.\ \underline{10}.\ \underline{10}.\ \underline{10}.\ \underline{10} = 10^6$$

Podem ser formadas 1.000.000, de senhas diferentes. Observa-se que neste caso a representação por enumeração das possibilidades seria impraticavel pelo valor muito grande de casos.

3.3.3 Problemas que exigem estratégias de resolução.

Essa atividade é composta de quatro problemas, com restrições, que exigem o uso de estratégias para serem resolvidos.

<u>Proposta</u> <u>Metodológica.</u>

Como alternativa ao **Problema 1**, propõe-se a utilização de cinco carteiras, organizadas de modo que possam representar os bancos do carro e cinco alunos (as) representando a família. Faz-se a simulação da situação e pede-se que os alunos envolvidos resolvam o problema da maneira que julgarem melhor. Apresentada a resposta faz-se a discursão acerca da estratégia montada, procura-se analisar se houve relação com o PFC.

Para o **Problema 2**, sugere-se a a divisão da turma em equipes de cinco componentes. Utilizando tiras retangulares de papel colorido, representando as faixas, pede-se que eles tentem montar todas as diferentes configurações de bandeiras e que façam a contagem . Apresentada a solução, mostra-se a associação com o PFC.

No **Problema 3**, utiliza-se a recomendação de Morgado et al (2016) que orienta que se alguma decisão é mais complicada que as demais, ela de ser tomada primeiro.

O **Problema 4**, apresenta uma situação em a ordem dos elementos envolvidos não gera uma nova contagem, ou seja, trabalha-se a ideia intuitiva de combinação simples.

Problema 1

Uma família, formada por **Pai**, **Mãe** e **Três filhos** adolescentes, farão uma viagem de passeio no carro da família. Sabe-se que este carro possui exatamente cinco lugares, sendo um para o motorista e quatro para os passageiros. De quantos modos a família pode se organizar dentro do carro durante a viagem se:

a) Apenas o pai sabe dirigir e os filhos devem sentar-se nos três bancos de trás.
b) Pai e mãe sabem dirigir e os filhos devem sentar-se nos três bancos de trás.

c) Pai e mãe sabem dirigir e os filhos podem sentar em qualquer lugar, com exceção ao destinado ao motorista.

Solução.

Considerando a representação: Pai (P), Mãe (M) e Filhos: (F1), (F2), (F3).

a) Respeitando-se as restrições, tem-se dois lugares fixos: P (motorista) e M (ao lado do motorista).

O problema resume-se a troca de posição (permutação) entre os filhos e pode ser calculado utilizando o PFC.

$$3.2.1 = 6$$

b) Trata-se de uma variação do item (a). Neste caso (P) e (M), podem mudar de posição, e o filhos permutam conforme resultado obtido no item anterior. Tem-se:

Nos bancos da frente:

$$2.1 = 2$$

Nos bancos de tras:

$$3.2.1 = 6$$

As possíveis configurações no carro podem ser calculadas pelo PFC.

$$2.6 = 12$$

c) Uma solução pode ser feita dividindo o problema em dois casos:

1º Caso : O Pai (P) dirigindo;

Fixa-se o motorista e permutam-se os demais.

$$3.3.3.1 = 24.$$

2º caso: A mãe (M) dirigindo;

De maneira análoga, faz este caso.

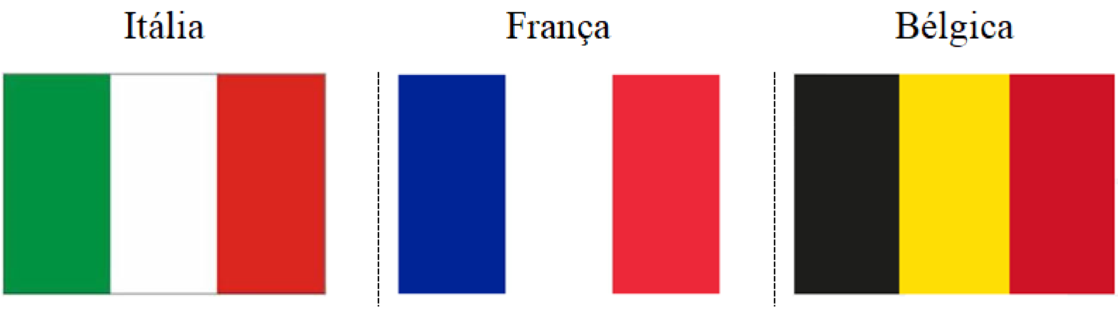
$$4.3.2.1 = 24$$

Somando os casos são 48 diferentes configurações que podem ser obtidas, respeitando as restrições do problema.

Problema 2

Grandes nações mundiais, são representadas por bandeiras formadas por três faixas verticais, como exemplo, tem-se a figura (**Figura 37**).

Figura 37 - Representação de bandeiras de três paises europeus.



Fonte: acervo do autor.

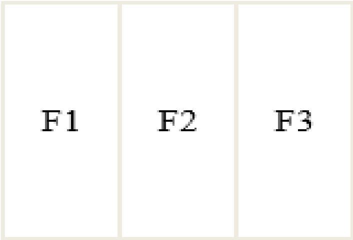
Utilizando as cores: verde, amarelo, azul e branco. Quantas bandeiras como o mesmo formato das representadas na figura anterior podem ser formadas, considerando as condições:

a) Cada faixa deve ser pintada de uma única cor e não se pode repeti-las.
b) Cada faixa deve ser pintada de uma única cor e pode repetir cores, desde que elas não sejam faixas consecutivas.

Solução.

Considerando a representação da figura (**Figura 38)**, em que F1, F2 e F3 representam as faixas a serem coloridas.

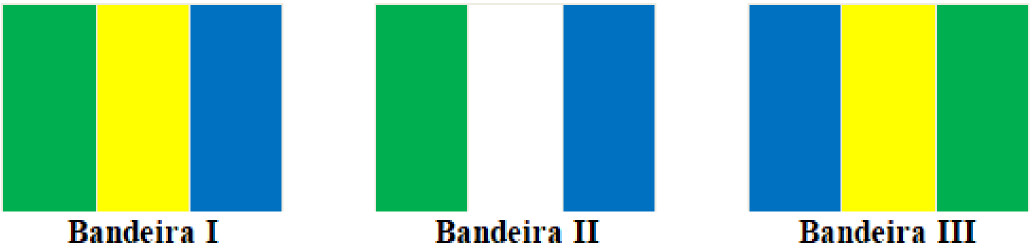
Figura 38 - Representação genérica da bandeira.



Fonte; acervo do autor.

Referente ao item (a). Três configurações possíveis e que atendem as restrições do problema, estão representadas a seguir.

Figura 39 - Representações de bandeiras sem repetir cores nas faixas.



Fonte: acervo do autor

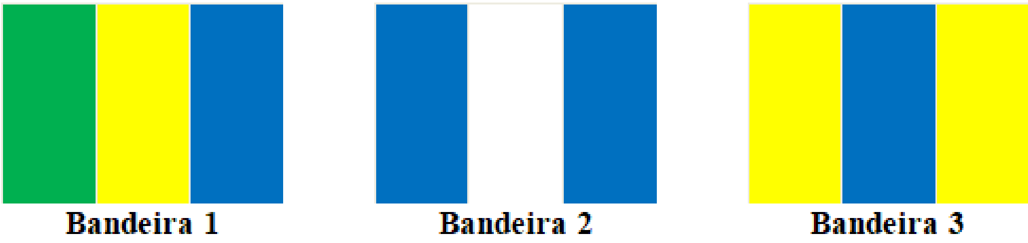
Levando em consireração as restrições do enunciado, para colorir F1, F2 e F3, pode-se usar respectivamente quatro, três e duas cores. Aplicando o PFC, chega-se:

$$\underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} = 24$$

Existem 24 formações de bandeiras que atendem as condições indicadas no problema.

Para a solução do item (b), há a restrição de que faixas adjacentes não podem ser coloridas com a mesma cor. A figura (**Figura 40**), mostra três exemplos válidos.

Figura 40 - Representação de bandeiras que podem repetir cores não adjacentes



Fonte: acervo do autor.

Da observação das formações, feitas com o material utilizado, percebe-se a necessidade de montagem de estratégias de resolução, pois este item não pode ser resolvido de forma direta com o item (a), tem –se então as possíveis estratégias de resolução:

- Estratégia 1.

Pode-se colorir primeiro a faixa do centro, neste caso tem-se 4 possibilidades (verde, amarelo, azul, branco). Definida a cor da faixa central, as duas outras faixas podem ser pintadas de 3 maneiras cada uma. Aplicando o PFC, tem-se

$$\underline{3} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3}$$

Há 36 possibilidades de formações de bandeiras que atendem o solicitado.

- Estratégia 2.

Pode-se dividir o problema em dois casos.

Primeiro caso:

As três faixas possuem cores diferentes. Dessa forma, tem-se como resposta o item (a) deste problema.

$$\underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2}$$

Há 24 possibilidades de formações de bandeiras, com F1, F2 e F3 de cores diferentes.

Segundo caso:

As faixas externas possuem cores iguais. Tem-se quatro possibilidades par F1, três para F2 (não pode ser igual a F1) e uma possibilidade para F3(pois deve ser igual a F1). Aplicando o PFC.

$$\underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{1}$$

Podem se formadas 12 bandeiras com F1 e F2 de mesma cor. E a resposta do problema é a soma dos dois casos:

$$24 + 12$$

Há 36 possibilidades de formações de bandeiras respeitando as restrições estabelecidas.

Problema 3

Quantos números de três dígitos distintos pode-se formar com os algarismos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9?

Solução.

Observa-se que a restrição encontra-se no primeiro algarismo que não pode ser zero, do contrario teriamos números com apenas dois digitos. Uma importante estratégia é comecar com a escola do primeiro algarismo tem-se nove opções (só não pode ser o zero), para o segundo são nove opções (só não pode ser igual ao primeiro) e o terciro pode ser escolhido dentre oito opções restantes(só não pode ser igual as duas anteriores). Aplicando o P.F.C

$$\underline{9}.\underline{9}.\underline{8.}$$

Podem ser formados 648 números de três digitos de acordo com o enunciado.

Problema 4

A turma do segundo ano do Ensino Médio da escola, possui 30 alunos. A direção solicitou a presença de dois estudantes em uma reunião. De quantas maneiras pode-se escolher esta dupla, e se fossem três os escolhidos?

Solução.

O primeiro escolhido pode ser qualquer um dos 30 estudantes, para a segunda, restam 29 possibilidades. Pelo PFC, o total de escolhas é:

$$\underline{30} \cdot \underline{29} = 870.$$

Considere as duplas formadas por: {João, Maria} e {Maria e João}, são indiferentes e portanto, foi contada duas vezes, ou 2!, então o total de escolhas é:

$$\frac{30.29}{2!} = \frac{870}{2} = 435.$$

Para o caso que devem ser escolhidas três pessoas, procede-se de modo análogo ao anterior.

$$\underline{30}.\underline{29}.\underline{28} = 24.360$$

Deve-se lembrar que, se considerarmos a escola de João (J), Maria (M) e Ana (A). A posição pela qual foram escolhidos não constitui um novo trio,

{J, M, A}; {J, A, M}; {M, J, A}; {M, A, J}; {A, J, M}; {A, M, J}.

Cada escolha foi repetida 3! vezes. Tem –se então que, os trios distintos são:

$$\frac{30.29.28}{3!} = \frac{24360}{6} = 4060.$$

3.3.4 Problemas envolvendo diferentes métodos de contagem.

Essa atividade é composta de seis problemas, que fazem uso das fórmulas apresentadas do capítulo 2 deste trabalho. Busca-se com isso mostrar, que elas podem ser aplicadas para agilizar a solução, sendo, portanto, uma alternativa importante, desde que se compreenda sua natureza diante da situação proposta e que não sejam utilizadas mecanicamente.

Proposta Metodológica.

Opta-se por questões com as quais sejam possiveis o uso, como alternativa, das expressões demonstradas no capitulo dois deste trabalho. Pretende-se aplica-las, como forma de agilizar soluções em situações devidamente entendidas e significativas, deixando portanto, seu caratér mecânico.

Problema 1

Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1000 a 9999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o número zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou? (OBMEP, 2005).

Solução:

Os números comprados são da forma:

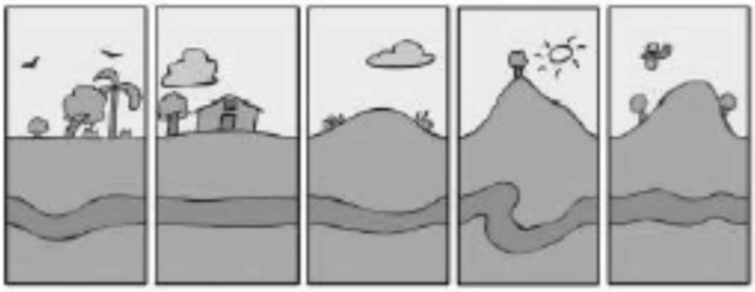
777__   77__7   7__77   __777

Sabe-se que o espaço vazio, pode ser ocupado pelos algarismos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9. Gerando em cada um desses oito números distintos. Portanto o número de bilhetes comprados é 32, obtido pela soma dos quatro casos.

Problema 2

Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco quadros da figura (**Figura 41**) . Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo é possível evitar que uma mesma paisagem se repita? (OBMEP, 2011).

Figura 41 - Representação dos quadros na parede



Fonte: OBMEP 2011.

Solução:

Cada paisagem é uma permutação simples, e pode ser calculada pela expressão (4).

$$P_n = n!$$

$$P_n = n.(n-1).(n-2)\ldots.3.2.1$$

Substituindo *n* por 5, que é o número de objetos permutados, obtêm-se:

$$P_5 = 5!$$

$$P_5 = 5.4.3.2.1 = 120.$$

O resultado mostra que existem 120 formações possíveis, como será utilizada uma por dia, é possível troca-las sem repetir durante 120 dias.

Problema 3

De quantas maneiras uma criança pode escolher três brinquedos diferentes, dentre os cinco que possui?

Solução 1: (Aplicação do PFC).

O primeiro escolhido pode ser qualquer um dos cinco, para o segundo, restam quatro opções e para o terceiro, três. Pelo PFC, o total de escolhas é:

$$\underline{5}\ .\ \underline{4}.\ \underline{3} = 60$$

As escolhas de brinquedos: {B1, B2, B3} e {B1, B3, B32}, são indiferentes, tem –se:

$$\frac{60}{3!} = \frac{60}{6}.$$

Resultando em 10 (dez) possíveis escolhas para a criança.

Solução 2:

Nomeando os brinquedos disponíveis por: {b_1, b_2, b_3, b_4, b_5}. A escolha de três deles, não depende da ordem pela qual serão selecionados, trata-se então de um problema de combinação simples que pode ser resolvido aplicando a expressão (14). Isto é,

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Com *n* representando o total de brinquedos (5) e *p* a quantidade a ser escolhida (3). Levando estes valores na expressão (14), tem-se que ,

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!}.$$

$$C_5^3 = \frac{5.4}{2} = 10.$$

O resultado obtido, indica que existem 10 maneiras distintas da criança escolher 3, dentre seus 5 brinquedos. Conforme representação seguinte.

{ b_1, b_2, b_3}; { b_1, b_2, b_4}; { b_1, b_2, b_5}; { b_1, b_3, b_4};{ b_1, b_3, b_5}

{ b_1, b_4, b_5}; { b_2, b_3, b_4}; { b_2, b_3, b_5}; { b_2, b_4, b_5}; { b_3, b_4, b_5}

Problema 4

O volante da Mega-Sena contém 60 números (cada um, chamado de dezena), que são 01, 02, 03, ..., 60. O resultado de um sorteio é composto de 6 dezenas, sorteadas entre as 60 dezenas. Quantos são os resultados possíveis? (OBMEP, 2021).

Solução:

O problema consiste na escolha, não ordenada, de seis elementos (dezenas) de um conjunto de 60 disponíveis. Tem-se um problema de combinação simples (60 escolhe 6), aplicando a expressão (14), Isto é

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}\,.$$

E tomando *n = 60 e p = 6* e levando os valores em (14), obtém-se:

$$C_{60}^6 = \frac{60!}{6!\,(60-6)!}.$$

$$C_{60}^6 = \frac{60.59.58.57.56.55}{720}.$$

$$C_{60}^6 = 50.063.860.$$

O valor de 50.063.860, representa o total de combinações de seis dezenas, escolhidas a partir das 60. Neste caso, torna-se impraticável enumerar todas as possibilidades.

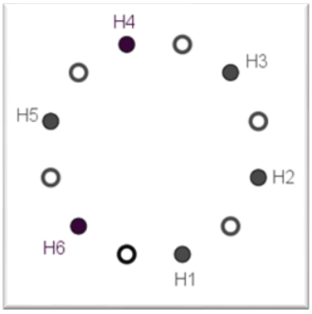
Problema 5

Em uma brincadeira em um programa de TV, seis casais devem se sentar em bancos arrumados de modo circular com a seguinte restrição: homens e mulheres devem se sentar de modo alternado, cada homem ao lado apenas de mulheres e vice-versa. De quantas maneiras esses casais podem se arrumar para a brincadeira? (OBMEP, 2021).

Solução:

Representando os homens por: (H1, H2, H3, H4, H5, H6). O problema pode ser resolvido, optando inicialmente por organiza-los na roda, deixando sempre entre eles um espaço vazio, conforme mostra a figura (Figura **42**).

Figura 42 - Representação de homens e mulheres no círculo.



Fonte: acervo do autor.

O total de maneiras de organizar os homens, corresponde ao número de permutações circulares com seis elementos, e pode ser calculado pela expressão (7):

$$(PC)_n = (\, n - 1)!$$
$$(PC)_6 = (6 - 1)!.$$
$$(PC)_6 = 5.4.3.2.1 = 120.$$

Existem 120 maneiras de organizar os seis homens em torno de um círculo.

Organizados os homens, devem-se arrumar as mulheres nos espaços deixados vazios. Como são 6 mulheres e 6 espaços, tal distribuição pode ser feita de acordo com a expressão (4), Isto é:

$$P_n \ = n!$$

$$P_6 \ = 6.5.4.3.2.1 = 720.$$

Existem 720 maneiras diferentes de organizar as mulheres, nos espaços vazios entre os homens. O PFC. permite calcular o número de configurações.

$$120 \text{ x } 720 = 86.400.$$

São 86.400 maneiras de organizar seis homens e seis mulheres, atendendo as restrições do problema.

Problema 6

Uma pessoa quer comprar 6 empadas numa lanchonete. Há empadas de camarão, frango, legumes e palmito. Sabendo que podem ser compradas de zero a seis empadas de cada tipo, de quantas maneiras distintas essa compra pode ser feita? (PORTAL DA OBMEP, 2021).

Solução:

Representando por: $x_{1,}\ x_{2,}\ x_{3,}x_{4,}$ a quantidade de cada empada comprada, pode-se representar a situação pela equação:

$$x_1 +\ x_2 +\ x_3 +\ x_4 = 6.$$

Sabe-se que x_1, x_2, x_3 e x_4, podem variar de zero a seis. Uma possível solução é:

$$(x_{1,}\ x_{2,}\ x_{3,}x_{4,}) = (2, 1, 0, 3).$$

Representando no esquema traço- bola, fica:

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 \\ \bullet\bullet & | & \bullet & | & & | & \bullet\bullet\bullet \end{array}$$

Cada solução pode ser representada por uma fila com seis (6) bolas e três (3) traços. Para resolver, pode-se usar a expressão (21),

$$P_n^{\alpha,\beta,\dots,k,\lambda} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!}$$

Substituindo na expressão $n = 9, \alpha = 6\ e\ \beta = 3$. Obtém-se:

$$P_9^{6,3} = \frac{9!}{6!\,3!} = \frac{9.8.7}{6} = 84.$$

O resultado mostrou que existem 84 maneiras distintas, de efetuar a compra.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O texto descrito possibilitou conduzir o ensino dos métodos de contagem, por meio de solução de problemas, tendo como proposito a valorização do pensar em detrimento a aplicação mecânica de fórmulas, contribuindo com a aprendizagem significativa. Para consolidar o estudo e ampliar o desenvolvido descrito nos três capítulos citados, trouxe como resultado para a pesquisa que o professor tem sempre a possibilidade refletir, acerca do processo de ensino e aprendizagem, investigar e testar suas práticas, podendo inovar suas metodologias, criando estratégias que ajudem os alunos a entender a matemática.

Foi pensando nessa prática que se desenvolveu esta pesquisa, abrindo caminhos para compreender o processo de ensino e aprendizagem dos métodos de contagem. Como forma de contextualização, buscou-se fazer seu resgate histórico, compreender e observar os autores responsáveis por desenvolver e consolidar o tema. Por essa razão, o primeiro capitulo, dedicou-se ao processo histórico.

Dando continuidade, sabe-se que, na área das ciências exatas, além do processo histórico, faz-se necessário que se aborde o formalismo matemático, definições, axiomas, teoremas, demonstrações dentre outros, a fim de dar a ela o seu caráter cientifico. Foi pensando nisso que o segundo capitulo do trabalho foi desenvolvido, buscando situar todas as formulações matemáticas necessárias e que fundamentam as atividades propostas.

O conhecimento matemático torna-se significativo, se for aplicado em alguma área do conhecimento humano. Dessa maneira, explica-se a razão de considerar o terceiro capítulo dessa pesquisa, que traz em seu bojo uma proposta de ensino aos métodos de contagem direcionada aos alunos do Ensino Médio. Seguindo as orientações da BNCC, e com as contribuições de três diferentes obras, construiu-se uma sequência de atividades, desenvolvidas por meio de problemas para serem aplicados em sala de aula.

Como parte integrante, considera-se que a pesquisa desenvolvida alcançou o seu objetivo principal, atrelando aos métodos de contagem uma abordagem em que buscou traçar três relevante desenvolvimento: aspecto histórico, formalismo matemático e estratégias de ensino nas resoluções de problemas. Espera-se que este trabalho possa ser utilizado como fonte de pesquisa para professores e alunos e que contribua com ensino e aprendizagem dos métodos de contagem.

5. REFERÊNCIAS.

BACHX, A. de C.; POPPE, L. M. B.; TAVARES, R. N. O. **Prelúdio à Análise Combinatória.** São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1975.

CARVALHO, P.C. **Métodos de Contagem e Probabilidade**. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática** – Tradução: Hygino H. Domingues 5ª ed. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2011.

MORGADO, A.C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 10ª ed. Rio de Janeiro, SBM, 2006.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 3. ed. São Paulo: Ática, 1991.

SOUSA, H.M. **A Resolução de Problemas como Estratégia Didática para o Ensino da Matemática**, 57 f. Dissertação de Mestrado – PROFMAT- Universidade Federal do Oeste do Pará. Santarém, 2015.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC, 2018.

TAVARES, C.; BRITO, F.R.M: **Revista do Professor de Matemática Vol. 57:** Contando a História da Contagem. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

SANTINHO, M.S; MACHADO, R.M. **Os Fascinantes Quadrados Mágicos** - III Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Goiás: Anais, 2006.

ANDRADE, L.A. **Revista do Professor de Matemática Vol. 41**: Mais sobre quadrados mágicos. Rio de Janeiro: SBM, 1999.

VAZQUES, C. M. R.; NOGUTI, F. C. H. **Análise Combinatória**: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, VIII. Recife: Anais, 2004.

BENEVIDES, F.S, **Introdução à Teoria dos Grafos - Parte 1**. Disponível em : https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=84. Acesso em 18/01/2021.

STEWART, I, **Almanaque das Curiosidades Matemáticas** – Tradução: Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

SANTOS, R.A, **Revista da Olimpíada IME nº 7**, p. 77-83. Goiás: UFG, 2008.

PIMENTA, M.M.D. **História do Problema das Quatro Cores**. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/wp-content/uploads/2018/08/Quatro-Cores_2.pdf. Acesso em 20/01/2021.

SAMPAIO, J.C.V. **Quatro Cores e Matemática**. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Bahia, 2004.

HOLANDA, B. **Círculos de Matemática da OBMEP, Vol. 1**: Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra. Rio de Janeiro: IMPA 2018.

VIEIRA, F.B.; MONTEIRO, N.Z. **Clubes de Matemática da Obmep**. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/b_c-kramp/. Acesso em 09/ 02/ 2021.

SANTOS, J.P; MELLO, M.P; MURARI, I.T.C. **Introdução À Análise Combinatória**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar Vol 5:** Combinatória, Probabilidade. 8ª Ed. São Paulo: Atual, 2013.

FOMIN, D; GENKIN, S; ITENBERG, I. **Círculos Matemáticos:** A Experiência Russa. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

BEZERRA, M.N.C. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Belém: EditAedi, 2018. E-book 198 p. Disponível em: http://livroaberto.ufpa.br/jspui/handle/prefix/480. Acesso em 02/02/2021.

ONUCHIC, L. R. et al. **Resolução de Problemas:** Teoria E Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

DANTE, L.R. **Matemática**: Contexto & Aplicações 3ª ed. São Paulo: Ática, 2016.

ESTEVES, I. **Investigando Fatores que Influenciam o Raciocínio Combinatório em Adolescentes de 14 Anos**: 8ª Série do Ensino Fundamental. 203 f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2001.

SÁ, P.F. **Atividades Para o Ensino de Matemática no Nível Fundamental.** Belém: EDUEPA, 2009.

PNLD, Plano Nacional do Livro Didático 2018. Disponível em: https://www.fnde.gov.br/pnld-2018/. Acesso em 12/06/2021.

OBMEP, **Programas e Portais.** Disponível em: http://www.obmep.org.br/.